



*Asesorías y Tutorías para la Investigación Científica en la Educación Puig-Salabarría S.C.
José María Pino Suárez 400-2 esq a Lerdo de Tejada. Toluca, Estado de México. 7223898479*

RFC: AT1120618V12

Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores.
<http://www.dilemascontemporaneoseduccionpoliticayvalores.com/>

ISSN: 2007 – 7890.

Año: V. Número: 1. Artículo no.17 Período: Junio - Septiembre, 2017.

TÍTULO: Irrupción de un concepto en el currículo: profesores de primaria definen y aplican el concepto de estimación de medida.

AUTORES:

1. Dra. Noemí Pizarro.
2. Dra. Núria Gorgorió.
3. Dr. Lluís Albarracín.

RESUMEN: En este artículo presentamos un estudio sobre algunos aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza que poseen los maestros del concepto de estimación de medida. Estudiamos cómo los maestros definen y aplican este concepto que ha sido introducido recientemente en el currículo chileno y sobre el que los maestros no han recibido formación específica. Encuestamos a 112 maestros en ejercicio durante su formación continua en Santiago de Chile. Mediante un análisis cualitativo-descriptivo observamos que el conocimiento disciplinar del concepto de estimación de medida está poco desarrollado, los maestros no conocen los aspectos clave de la estimación de medida y la confunden con otras actividades de medida como la medida con unidades no estándar.

PALABRAS CLAVES: Estimación de medida, conocimiento matemático para la enseñanza.

TITLE: Irruption of a concept in the curriculum: primary teachers define and apply the concept of measurement estimation.

AUTHORS:

1. Dra. Noemí Pizarro.
2. Dra. Núria Gorgorió.
3. Dr. Lluís Albarracín.

ABSTRACT: In this article, we present a study of certain aspects of the mathematical knowledge for the teaching that teachers possess about the concept of measurement estimation. We study how teachers define and apply this concept which has been recently introduced in the Chilean curriculum and on which teachers have not received specific training. A survey was applied to 112 in-service teachers in their continuing training in Santiago de Chile. By means of a qualitative-descriptive analysis, we noted that the disciplinary knowledge on the concept of measurement estimation is poorly developed; teachers do not know the key aspects of the measurement estimation and confuse it with other measurement activities such as measurement with non-standard units.

KEY WORDS: measurement estimation, mathematical knowledge for teaching.

INTRODUCCIÓN.

En los inicios de los años 80, diversas directrices internacionales de educación matemática recomendaron incrementar la presencia del estudio de la medida en los currículos de la matemática escolar (NCTM, 1980; Informe Cockcroft, 1982; ICMI, 1986). En el caso chileno, estas recomendaciones se han completado en el ajuste curricular de 2012 que realizó el Ministerio de Educación para la Educación Primaria, considerando ahora un eje curricular dedicado a los objetivos que incluyen cantidades de magnitudes.

Los objetivos del eje de Medición pretenden que los estudiantes sean capaces de identificar y cuantificar las medidas de los objetos con el fin de poder compararlos y ordenarlos. El plan de estudios propone que se comience trabajando con unidades no estandarizadas para continuar con las unidades de medida estandarizadas o tradicionales de la longitud, el área, el tiempo, el peso, la capacidad y el volumen (MINEDUC, 2012). El eje de Medida sólo trata la medida continua, la medida discreta es tratada en el eje de Números y Operaciones en los objetivos vinculados al conteo en los dos primeros años (estudiantes de seis y siete años). En ambos casos, los objetivos de aprendizaje incluyen, por primera vez, en forma general o específica, la estimación de medidas a lo largo de los seis años que abarca la Educación Primaria.

Se debe considerar, que la estimación de medida se presenta como un nuevo contenido en el sistema educativo a tratar en clases. En particular, es probable que los propios maestros no trataran la estimación de medida en su formación básica, ni posteriormente hayan recibido formación didáctica específica para orientar su docencia; por ello, que la mayoría de los maestros sólo tengan a su disposición las orientaciones ministeriales y las muestras de ejercicios o actividades que se han desarrollado para elaborar los libros de texto promovidos por el Ministerio de Educación chileno.

A partir de estos antecedentes, nos parece que la situación actual presenta una gran oportunidad para estudiar el conocimiento matemático y didáctico que poseen los maestros para desarrollar las innovaciones curriculares con sus estudiantes, con lo que nos planteamos el siguiente objetivo de investigación:

- Caracterizar el conocimiento de la estimación de medida que poseen los profesores, tanto en la definición del concepto como en las estrategias de estimación de medida que utilizan.

Para dar respuesta a este objetivo, nos basamos en la conceptualización de la estimación, así como las implicaciones teóricas para su enseñanza en las aulas. Dada la naturaleza de los datos recogidos, se nos plantea la necesidad de elaborar una nueva definición de estimación de medida,

que a partir del conocimiento teórico previo, permita caracterizar satisfactoriamente las respuestas de los maestros encuestados; por lo tanto, este trabajo realiza dos aportaciones de diferente naturaleza: por una parte, la definición de estimación de medida y el formato de análisis de datos que soporta, y por otro, la descripción cualitativa del conocimiento previo de los maestros en activo sobre estimación de medida.

DESARROLLO.

Sobre la definición de estimación.

La Real Academia Española define el sustantivo estimación como “Aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo”, en una definición del concepto escrita desde la perspectiva de la ciencia económica en la que se valoran bienes y servicios. Este enfoque es lejano a la perspectiva tomada en las diversas investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática en las últimas décadas, donde se han desarrollado diferentes definiciones del concepto de estimación que responden a diferentes tipos de tarea matemática.

Para Bright (1976) estimar es “un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos” (p.89). En esta definición observamos que la valoración de la medida debe ser sin instrumentos de medida y basada en aspectos perceptivos; sin embargo, al indicar “visuales o manipulativos”, es posible que la iteración de la unidad sobre la medida se considere un trabajo estimativo.

El Informe Cockcroft (1982) definió estimación como una “habilidad para evaluar si es razonable el resultado de un cálculo o de una medida; la capacidad de hacer juicios subjetivos acerca de una variedad de medidas” (pp 22-23). Esta definición rescata el uso evaluativo de la estimación de la medida, como también la subjetividad del proceso y/o resultado, por otro lado, engloba el término de estimación tanto en aritmética como en medida; no obstante, la tarea en sí no es parte de la definición.

Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) definen estimación como “juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite” (p.18). Los autores no la llaman ni proceso o habilidad, como fue definida anteriormente, sino “juicio” y un juicio subjetivo, con lo que la validación del resultado obtenido depende de las posibilidades y necesidades del estimador. Al igual que la definición dada en el Informe Cockcroft (1982), estos autores consideran una misma definición general para las estimaciones de cálculos numéricos y para la estimación de medida, aunque consideren que son procesos que tienen sus propias particularidades. Además, tampoco indican cómo se realiza la tarea en sí.

Clayton (1996) se refiere a la estimación como “la habilidad para conjeturar sobre el valor de una distancia, costos, tamaños, etc. o cálculos” (p. 87). El autor indica que es una “habilidad para conjeturar”, es decir, el estimador debe tener algún indicio de alguna medida o cálculo para poder realizar una estimación que puede ser parte de cualquier área matemática.

Para Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010), la estimación “se refiere a un número que es una aproximación adecuada para un número exacto dado el contexto particular, que se sustenta en algún tipo de razonamiento” (p. 241). En este caso, la estimación es una aproximación adecuada que engloba diferentes procesos en distintas áreas de la matemática y se soporta en razonamientos matemáticos con lo que no supone un proceso por el que se obtengan números de forma azarosa. Al igual que la definición de Clayton, es necesario tener un referente.

Los diferentes tipos de estimación.

En general, podemos observar que estas definiciones describen diferentes tipos de tareas matemáticas. Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), con el propósito de distinguir en el aula las tareas de estimación, explican que la estimación de medida se distingue de la estimación computacional por razones metodológicas. Por otro lado, Hogan y Brezinski (2003) concretan esta idea y distinguen los siguientes tres tipos de estimaciones: i) Estimación computacional: se refiere

al proceso por el que se determina rápidamente un valor aproximado para el resultado de una operación aritmética; ii) Estimación de numerosidades (numerosity): se refiere a la habilidad de estimar visualmente el número de objetos dispuestos en un plano en un tiempo limitado, ha sido usada en test perceptivos; y iii) Estimación de medida: se basa en la habilidad perceptiva de estimar diferentes magnitudes (longitud, área, volumen, tiempo, peso, etc.) en objetos comunes.

Hogan y Brezinski (2003) concluyen, que la estimación computacional es una habilidad que se desarrolla en conjunto con el resto de habilidades aritméticas o las habilidades desarrolladas habitualmente en la escuela; sin embargo, numerosity y la estimación de medida requieren en conjunto del mismo tipo de habilidades, que se relacionan con aspectos perceptivos. Estos dos tipos de estimación deberían separarse conceptualmente de la estimación computacional, ya que promueven procesos y habilidades distintos. Al mismo tiempo, conjeturan sobre el énfasis que deberían tener las imágenes y referentes mentales en el trabajo cognitivo de la medición y la orientación espacial.

El curriculum chileno considera tanto numerosity y estimación de medida desde el primer año de primaria, en tareas de medición de medidas discretas y medidas continuas respectivamente.

Sobre los procesos de estimación de medida.

La estimación de medida está fuertemente ligada a las experiencias previas de medición y parece tener una importante influencia del contexto en la que se realiza (Harel y Sowder, 2005). Los elementos del contexto detectados que pueden influir en la estimación de longitudes incluyen los distractores cognitivos, así como las dimensiones y orientaciones del objeto en el espacio (Hellert, Bracket, Salik y Scroggs, 2003; Leek, Reppa, Rodríguez y Arguin, 2009).

Para Clements y McMillen (1996), la apropiación de una cantidad es una referencia que se debe activar en el momento de estimar. Consideran, además, que los individuos poseen herramientas de medición interna, que operan como participación mental o como la segmentación de una longitud que no es verbal y que representa una magnitud. Es necesario, que esta referencia de una medida,

no se separe del sentido numérico correspondiente (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam, 2005). En esta línea, Jones, Taylor y Broadwell (2009) afirman, que el uso de referentes propios, en especial los elaborados a partir del propio cuerpo, supone un primer paso para crear un sentido de escala propio, que entienden como una ampliación al campo de la medida del concepto de sentido numérico.

Las ideas del párrafo anterior convergen con la postura de Bright (1976) sobre que la estimación de medida contribuye al desarrollo del concepto de número, enumeración, cantidad y conteo. Por otro lado, sensorialmente contribuye al desarrollo de las habilidades perceptivas, dado que para estimar es necesario el uso de los sentidos al no trabajar con instrumentos de medida (Informe Cockcroft, 1982; Hogan y Brezinski, 2003); además, favorece el pensamiento de orden superior y las habilidades de resolución de problemas (Ainley 1991; Dowker 1992).

La estimación de medida en las aulas.

La estimación de medida es parte del proceso del aprendizaje de la medida discreta y continua, tanto en tareas relacionadas con el concepto como en su valoración y conservación; sin embargo, desde el punto de vista de la enseñanza de la estimación de medida, las investigaciones indican que su desarrollo en las aulas no ha sido idóneo. Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam (2005) muestran, que cuando se solicita a un maestro que proponga actividades de estimación de medida a sus alumnos, las tareas solicitadas son adivinanzas en vez de estimaciones de medida, ya que los docentes no proporcionan el contexto o la información necesaria para crear el ambiente de trabajo que se requiere. Forrester y Piké (1998) observaron, que la estimación de medida se trataba en las aulas como una hipótesis predictiva, en forma vaga y superflua, sin trabajar con respuestas satisfactorias para resolver situaciones a las que sólo podía dar respuesta un instrumento de medida, por medio de una respuesta exacta. Estos autores observaron que la estimación se trataba por medio del pensamiento sensato; por ello, estimar se convertía en adivinar. Lang (2001) complementa esta situación desde el punto de vista de los maestros,

afirmando que los docentes tienen dificultades al tratar la estimación de medida, porque no están seguros de cómo construir un tratamiento de la estimación de medida para que los estudiantes entreguen respuestas razonables.

A partir de un estudio con futuros maestros, Subramaniam (2014) afirma, que los maestros encuestados tenían un conocimiento propio del uso de referentes para realizar estimaciones de medida, pero que este conocimiento no se traduce directamente en un conocimiento didáctico para poder trabajar la estimación de medida en el aula con garantías de éxito.

Por su parte Jones, Forrester, Gardner, Grant, Taylor y Andre (2012), después de investigar sobre la precisión de las estimaciones de medida de los estudiantes, concluyen que se necesitan más trabajos que incidan en el conocimiento de las habilidades cognitivas relacionadas con la estimación de medida, comentan además, que las habilidades relacionadas con la estimación de medida han demostrado ser valiosas en diferentes ámbitos laborales (Jones y Taylor, 2010) aunque haya sido probado que son difíciles de adquirir para los alumnos (Joram, Subrahmanyam, y Gelman, 1998; Sowder, 1992).

A modo general, Chamorro (1996) expresa, que los estudiantes rechazan las estimaciones de medida, porque generalmente en sus tareas prima la exactitud, incluso en situaciones donde no tiene sentido plantear un problema de precisión. Considera, que en el escenario educativo hay una idealización de los objetos, donde las mediciones se realizan siempre de forma adecuada y sus resultados son mayoritariamente números enteros, alejando la actividad en las aulas de las actividades realizadas en entornos profesionales o personales. Para Chamorro y Belmonte (1988), la medida carece del desarrollo escolar adecuado y se caracteriza por la necesidad de proporcionar un número entero como el resultado de una medida, para subsanar esta situación proponen realizar tareas de estimación.

Metodología: Población.

La población informante corresponde a 112 profesores chilenos en activo que imparten docencia en matemáticas en niveles de Educación Primaria. Todos los docentes participantes en el estudio, durante la participación en la investigación, estaban en formación continua como especialistas en educación matemática de primaria. La Tabla 1 muestra la información relativa a la edad, estudios previos y años de experiencia de los maestros encuestados.

Edad	f	Estudios	f	Experiencia	f
20-30	53	Lic. Educ. Básica	92	Primer año	17
30-40	22	Lic. Educ. Matemática	7	1-5	40
40-50	22	Lic. en Mat.	1	10-15	6
50-60	13	Magíster	7	Más de 15	22
Sin inf.	2	Otros	2	Sin Información	
		Sin información	3		

Tabla 1. Información sobre la población encuestada.

Metodología: El instrumento de recogida de datos.

La totalidad de los profesores contestó a una encuesta escrita formada con preguntas abiertas sobre la definición y aplicación de la estimación de medida. Las preguntas están orientadas a describir los procesos por los que los propios maestros realizan estimaciones de medida, así como su conocimiento sobre la definición formal del concepto.

Nuestro estudio se enfoca en el conocimiento matemático que poseen los maestros de primaria sobre estimación de medida; por ello, nos orientamos en el Modelo del Conocimiento Matemático Para la Enseñanza (MKT) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008). El MKT es un modelo del conocimiento profesional del profesor, que continua, de forma particular, para la enseñanza de las matemáticas, ideas propuestas por Shulman (1986) sobre el Conocimiento Pedagógico del Contenido.

Ball, Thames y Phelps (2008) se proponen determinar el tipo de conocimientos que deben poseer los profesores para enseñar matemáticas de forma eficaz y se refieren al conocimiento docente necesario para la enseñanza de la matemática. El MKT posee seis componentes, uno de ellos vinculado al conocimiento disciplinario, el denominado Conocimiento Común del Contenido (CCK). Para Ball et. al. (2008), el CCK es el primer paso para una efectiva enseñanza de la disciplina, y lo definen como el conocimiento matemático y las técnicas utilizadas en lugares distintos del de la enseñanza. A raíz de ello, nuestro instrumento de recogida de datos posee cuatro vinculadas exclusivamente al conocimiento disciplinario que poseen los maestros de los procesos de estimación de medida y a su definición. A continuación presentamos las cuatro preguntas utilizadas para recoger los datos que presentamos en este trabajo.

Pregunta 1. Estime la altura de la sala. Describa paso a paso el proceso. No es necesario dar un resultado.

Pregunta 2. Estime el área de la pizarra. Describa paso a paso el proceso. No es necesario dar un resultado.

Pregunta 3. Si propusiera esta actividad de estimación de medida a sus estudiantes:



¿Cuál es el área aproximada de esta pintura?, ¿Qué estrategia usaría usted para resolverla?

Pregunta 4. ¿Qué entiende por “estimación de medida”?

Considerando lo anterior, nuestros datos para realizar este estudio corresponden a las cuatro respuestas entregadas por los 112 maestros a cada una de las preguntas expuestas.

Análisis de los datos.

El análisis de los datos recogidos es de tipo cualitativo y se enmarca en el paradigma interpretativo, ya que pretendemos caracterizar el conocimiento disciplinario de los maestros sobre estimación de medida. La primera fase del proceso de análisis, en la que se realiza una primera lectura de las respuestas de los maestros participantes, nos hizo advertir que una parte importante de los maestros realizaban tareas distintas a las de estimación de medidas. Para poder diferenciarlas y determinar con claridad la naturaleza de cada una de las tareas propuestas, elaboramos una definición de estimación de medida a partir de los referentes teóricos presentes en la literatura. La definición de estimación de medida que utilizamos en el análisis de los datos, y que ha sido presentada y ejemplificada previamente en Pizarro, Gorgorió y Albarracín (2016), es la siguiente: “Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar”.

Esta definición se sustenta en tres componentes fundamentales: Asignar un valor numérico (V), realizar la tarea perceptivamente (P) y la relación de la percepción con los conocimientos previos, es decir, en base a un referente (R). Esta definición considera las ideas del trabajo perceptivo (Hogan y Brezinsky, 2003; Callís, Fiol, Luca y Callís, 2006; Sarama y Clements, 2009), característica que diferencia a la medición con la estimación, dado que el uso de los sentidos no permite la iteración directa de la unidad de medida con el objeto correspondiente.

El desarrollo de imágenes mentales a modo de referencia (Clayton, 1996; Hogan y Brezinski, 2003; Clements y McMillen, 2009; Joram 2003; Van de Walle, Karp y Bay-Williams, 2010), fundamentan la tarea para que el trabajo se relacione con el razonamiento lógico, no dando lugar a la respuesta aleatoria. Por último, la valoración es parte del desarrollo del sentido numérico en la estimación de medida (Bright, 1976; Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam; 2005).

Por otro lado, observamos que muchas respuestas de los docentes se corresponden con la definición de medición de Sarama y Clements (2009): “Medir una longitud o distancia consiste en dos aspectos: identificar una unidad de medida y subdividir (mental y físicamente) el objeto por la unidad, localizando la unidad de principio a fin (iterándola) a lo largo del objeto” (p.187).

Podemos apreciar, que ambos procesos tienen como objetivo común dar un valor para una cierta cantidad de medida, pero existen diferencias. Al medir, utilizamos un patrón definido a priori, llamado unidad de medida, que compararemos con la unidad de magnitud por medio de la iteración. En la estimación de la medida, este último proceso, la iteración, no existe, sino que se utiliza un referente mental adecuado, como unidad de medida, para valorizar la medida de la magnitud a estimar; sin embargo, ambos procesos tienen distintas formas de ser ejecutados, ya sea por medio de la unidad de medida a utilizar o en el uso de la misma. Para diferenciar las distintas formas de medición de diferentes magnitudes, construimos la tabla 2 a partir de las respuestas de los docentes, los antecedentes teóricos y nuestro conocimiento empírico.

	Tarea.	Definición.	Ejemplo.
Numerosity	Numerosity.	Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud discreta observando la colección de objetos por una cantidad de tiempo determinado.	“Eduardo, en una presentación, observó por 5 segundos una cantidad de puntos. Dice que son 40”.
Estimación	Estimación con referentes propios (V-P-R).	Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud discreta o continua, por medio de referentes propios.	“Javier tiene la imagen mental de un metro cuadrado, a partir de ella, estima que el jardín tiene cinco metros cuadrados”. “Felipe trabaja en una oficina de fotocopadoras. Tomó unas cuantas hojas y supo que eran alrededor de 40 sin tener que contarlas”.
	Estimación con referentes auxiliares (V-P-R).	Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud discreta o continua, por medio de una comparación no directa con algún objeto auxiliar.	“Andrea tiene un sus manos un kilo de arroz. Después tomó una bolsa con harina, considera que tiene menos peso que la anterior, indica que debe ser un medio kilo”.

	Estimación indirecta (V-P-R).	Asignar un valor por medio de una modelación en base a la estimación de una o más cantidades.	“En cada fila deben hacer unos 10 estudiantes. Hay aproximadamente 20 filas, por lo tanto hay unos 200 estudiantes formados”.
Medición	Medición con unidad no estandarizada.	Asignar un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud continua, por medio de una comparación directa con algún objeto auxiliar o del conteo.	“Ana midió el volumen del balde repartiéndolo en vasos. El volumen del balde es equivalente a 5 vasos y un poco más”. “Juan puede dar cinco pasos a lo largo del muro. Sus pasos miden aproximadamente un metro, entonces el largo del muro es de 5 metros”.
	Medición con instrumentos de la medida de unidades estandarizadas.	Asignar un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud continua o discreta por medio de instrumentos que miden unidades estandarizadas.	“En el material didáctico hay reglas de 1 metro, 1 decímetro y 1 cm. Con esas unidades los estudiantes miden diferentes magnitudes de longitud, área y volumen en la sala de clases”.
	Medición con instrumento de medida.	Asignar un valor y una unidad de medida a una magnitud por medio de un instrumento de medida. El instrumento mide unidades estandarizadas.	“Debes hacer 20 abdominales en 30 segundos. Concéntrate en hacerlos, el tiempo lo medirá el cronómetro”. “No te preocupes, en el banco los billetes son contados con una máquina, así no hay errores de conteo”.
	Medición indirecta (¿no debería ser por modelación?).	Asignar un valor y una unidad de medida a una magnitud por medio de una modelación o un modelo matemático.	“Un árbol proyecta una sombra de 6 m. De longitud cuando el ángulo de elevación de los rayos del sol mide 60° , con esa información podemos saber la altura del árbol”.

Tabla 2. Formas de asignar una medida a un objeto.

Consideramos que las definiciones anteriores se pueden aplicar en diferentes ejemplos de las magnitudes presentes, comunmente, en los curriculums escolares, como la longitud, el área, el volumen, el tiempo, la masa, etc.

A continuación, presentamos el análisis de cada una de las respuestas a las tres preguntas analizadas en este estudio.

Análisis de la Pregunta 1.

El análisis de las respuestas de esta pregunta se centra en clasificar qué trabajo realizan los docentes para asignar un valor a la medida solicitada, la altura de un salón de clases.

Las respuestas se dividieron entre estimaciones y mediciones. Los docentes que realizaron estimaciones, utilizaron tanto la estimación con referentes propios como la estimación con referentes auxiliares, siendo esta última la que hemos detectado con mayor frecuencia. Los dos primeros ejemplos, que continúan, corresponden a respuestas de estimación con referentes propios y el tercero a la estimación con referentes auxiliares.

“1. Observar la altura de la sala; 2. Comparar la altura con 1 metro; 3. Aplicar mentalmente el metro aproximar en la altura de la sala; 4. Dar respuesta aprox. 4 metros”.

El docente que realizó esta respuesta ha hecho propia la idea de metro (R), dado que la elige como la unidad adecuada para hacer una iteración mental de ella en la pared (P) y así obtener el valor (V) de la medida.

“3.60 cm. Calculé la altura de un mueble de 1,80. Llegaba a la mitad. El doble 3,60 cm”.

En esta respuesta, podemos observar, que el maestro tiene una idea mental (R) de cuánto mide metro, por ello puede estimar que la altura del mueble es 1,8m, Posteriormente, estima que la parte faltante mide lo mismo que el mueble, por ende, la altura la valoró como 3,6m (V), El docente utilizó la visualización para realizar la tarea perceptiva (P).

Podemos observar, que en este caso, el trabajo es una estimación y la respuesta es coherente si suponemos que el docente confundió la abreviación de metro con la de centímetro.

En reiteradas respuestas observamos que para los docentes utilizan del verbo calcular como sinónimo de medir o de estimar. Para realizar el análisis, no consideramos la diferenciación.

“Relacionaría por ejemplo: Mi estatura aproximadamente y me preguntaría ¿Cuántas veces debería colocarla hacia arriba? (la maestra dibuja dos personas, una sobre otra, etiquetadas con 1,6m)”.

En esta respuesta, el docente consideró su estatura como referente (R), iterándola mentalmente (P), inclusive representó esta idea por medio de un dibujo. Al hacerse la pregunta y representar dos personas a lo largo de la altura de la pared, nos indica que el resultado de la estimación es 3,2m (V).

Podemos observar, en estos tres ejemplos, que todos los docentes trabajan con la percepción (P) y la valoración (V). Es en la referencia, la diferencia de los dos primeros ejemplos con el tercero, en los dos primeros la referencia está apropiada por el docente, en el tercero es un elemento auxiliar, que como puede ser un objeto cercano o incluso el propio cuerpo, como en el ejemplo.

Los docentes que realizaron una medición, se diferencian del grupo anterior porque en vez de usar una iteración indirecta del referente, por medio de los sentidos, lo hacen en forma directa, como en el siguiente ejemplo.

“Podemos pegar pliegos de cartulina que por lo general miden entre 90 y 100 cm, y ver cuántos pliegos se necesitan y así calcular la altura”.

En esta respuesta, podemos observar, que existe un referente (R), y la valoración (V) se obtendría gracias a la multiplicación de la cantidad de pliegos en la pared por 90 cm ó 100 cm según corresponda. Cuando el docente explica que van a pegar los pliegos en la pared, está indicando que se realizará una iteración directa del referente.

Análisis de la Pregunta 2.

Esta pregunta se distingue de la anterior, porque la magnitud a estimar es distinta. En la pregunta 1 se estimaron medidas longitudinales, y en esta pregunta, de superficies. Nuevamente, los docentes se dividieron entre quienes estimaron medidas y entre quienes midieron. En el grupo de docentes que estimó, hubo sólo uno que utilizó referentes auxiliares, el resto utilizó referentes apropiados, como el del siguiente ejemplo: “La pizarra tiene aproximadamente 1m de alto y 3m de largo. $3 \times 1 = 3m^2$ aproximadamente”.

Observamos, que este docente, al decir “Aproximadamente 1m de alto y 3m de largo” está valorando (V) la medida de los lados de la pizarra por medio de la percepción visual (P), gracias a que tiene una imagen mental de la longitud de un metro (R), posteriormente por medio de una multiplicación, es decir, utilizando una estimación indirecta.

Este tipo de respuestas se repite en todas las respuestas de la categoría. Ningún maestro utilizó unidades bidimensionales, todos utilizaron el metro a lo largo y a lo ancho de la superficie de la pizarra, excepto el maestro que utilizó referentes auxiliares.

“En el contorno derecho de la pizarra hay un franelógrafo de $1m^2$ y la pizarra es de 10 cm más menos mayor que el franelógrafo, el largo de ella es el doble del franelógrafo”.

Observamos, que este docente, compara visualmente (P) la medida del franelógrafo, donde reconoce $1m^2$ con la medida la medida de la pizarra (R) para lograr la valoración (V).

Entre los docentes, que miden, podemos observar distintas tareas de medición para conocer la medida del área de la superficie: quienes usan unidades bidimensionales, quienes usan unidades unidimensionales, y posteriormente, utilizan un arreglo bidimensional (multiplicación), y quienes sólo miden uno o ambos lados de la pizarra, sin llegar a un resultado que posea unidades bidimensionales; en los siguientes ejemplos se pueden observar respuestas de las distintas categorías: “Rayaría la pizarra en cuadros iguales (el encuestado dibuja una cuadrícula y la nombra como pizarrón). Contaría los cuadrados y mi área sería la cantidad de cuadrados. Ejemplo: 18 cuadrados.”

Observamos, que este docente utiliza cuadrados congruentes como unidad de medida (R); sin embargo, no realiza ningún trabajo perceptivo, al cuadrricular la superficie, itera la unidad de medida para encontrar la cantidad (V) que recubre la pizarra.

“Buscó una unidad de medida cercana; por ejemplo, el estuche, mido el alto y luego el ancho de la pizarra. Multiplico ambos números obtenidos; por ejemplo: 6 estuches • 10 estuches = 60 estuches²”.

Este docente utiliza como unidad de medida un objeto común en todas las aulas, un estuche (R), como unidad de medida. El profesor indica explícitamente que mide, como tampoco da indicios de que este estuche podría ser un objeto auxiliar para estimar, consideramos que realiza una iteración directa en ambos lados de la pizarra. Posteriormente, para encontrar el valor de la medida (V), el profesor realiza un arreglo.

“1. Usando algún elemento u objeto, como por ejemplo un libro; 2. Colocar el libro en la pizarra por los bordes para ir contando”.

En esta respuesta, el docente indica explícitamente que el borde de libro, usado como referente (R), se utiliza en forma directa en el objeto al medir, indicando “colocar el libro en la pizarra por los bordes para ir contando”, con el fin de llegar a una posible medida.

Todas las respuestas similares, al último ejemplo, hacen énfasis en la unidad de medida a utilizar para medir uno o ambos lados.

Además de los grupos de los docentes, que realizaron estimaciones y mediciones, hubo un tercer grupo, que indicó usar la fórmula para calcular el área de rectángulos, es decir, la multiplicación de la base por la altura.

“El área de la pizarra podría ser obtenida a través de la aplicación de las fórmulas. En este caso, sería: $A = \text{base} \times \text{altura}$ ”.

Como se observa, en este tipo de respuestas, no hay referentes ni percepción, el procedimiento sólo busca la valoración (V).

Análisis de la pregunta 3.

La pregunta tres es similar a la pregunta dos, dado que en ambas situaciones se debe realizar una estimación de una medida de superficies. Los maestros se dividieron entre quienes estimaron, quienes midieron y quienes indicaron referentes o unidades de medida para estimar o medir. A pesar de que les preguntamos cómo ellos estimarían, la mayoría de los docentes redactó las

respuesta de acuerdo a cómo lo trabajaría con los estudiantes, lo que corresponde a otra dimensión del MKT.

A continuación podemos observar algunos ejemplos de respuesta: “Veo la altura de la persona sentada, supongo que es alrededor de 1 m, comparo la persona con el cuadro que es un poco más alto 1,2m. El ancho es parecido. Entonces, calculo $1,2\text{m} \times 1,2\text{m} = 1,44\text{m}^2$ aprox. $1,5\text{m}^2$ ”.

Podemos observar, que el profesor utiliza su idea de metro (R) para poder comparar visualmente (P) los referentes de la imagen, como la medida de una persona sentada, a partir de ello, multiplica ambos lados y aproxima para llegar al resultado (V). Esta respuesta reúne a las tres componentes de nuestra definición de estimación de medida, por lo tanto, corresponde a una estimación de medida indirecta.

“Cuadricular la pintura, y luego con los cuadrados obtenidos calcular el área”.

Este docente cuadrícula la pintura, es decir, usa como referente un cuadrado (R), y al cuadricular, lo itera directamente, para calcular (V) el área. Observamos, que hay ausencia de la percepción, por ello, hay una medición con unidades bidimensionales.

“Utilizaría las cuartas para sacar un perímetro. Luego, con el resultado estimado, aplicaría la fórmula para sacar el área”.

En esta respuesta, el docente indica que las cuartas son unidades de medida (R), dado que no explicita que no habrá una comparación indirecta con ellas. Por otro lado, el docente aplicaría la fórmula para encontrar el área (V) de la superficie. Este es un ejemplo de los tipos de respuesta en que los docentes realizaron una medición indirecta, porque midieron los lados, y posteriormente, utilizaron la fórmula del área de rectángulos.

“Usaría cuartas para medir el ancho y el alto”.

En esta respuesta, el docente utiliza las cuartas como unidad de medida (R), pero no indica que utilizaría los sentidos, por lo tanto, hay ausencia de la percepción. Por otro lado, el docente sólo indica como mediría los lados, pero no cómo llegaría a la medida del área.

Un grupo importante de docentes sólo se limitó a indicar qué referente o qué unidad de medida utilizaría para realizar la tarea, pero no el cómo, como podemos observar en los siguientes ejemplos:

“Propondría que se calculara aproximadamente la estatura de la persona que está sentada al lado de la pintura. Con esta relación, se podría estimar la medida del cuadro”.

En esta respuesta, el docente busca un referente (R) dentro del entorno en el que se realiza la medición; sin embargo, no indica cómo sería el procedimiento.

“Yo usaría una regla. Si voy a trabajar con niños permitiría usar carpetas, hojas, etc”.

Podemos observar que el docente directamente indica que realizaría la tarea con unidades de medida comunes a la medición con instrumentos de medida, como una regla. Por otro lado, explica que si está con estudiantes, utilizaría medición con instrumentos de medida no estandarizados.

Al igual que en la respuesta anterior, algunos docentes sólo indicaron que realizarían la actividad utilizando la fórmula para calcular el área de rectángulos.

“Le haría ver a los alumnos que se trata de una figura con dos dimensiones: largo y ancho; por lo tanto, se deben obtener dos medidas para el cálculo de área”.

Se observa que en esta figura se enfatiza en el cálculo del área (V) dado que es una figura de dos dimensiones, posiblemente para el docente, la congruencia y los ángulos rectos no necesitan ser nombrados por las características del óleo de la figura.

Análisis de la Pregunta 4.

Las preguntas anteriores miden la aplicación del concepto, esta pregunta mide directamente la definición conceptual directamente. Posiblemente, por esta diferencia, las preguntas tuvieron distintas categorías. Los docentes se dividieron entre los que definen una estimación en base a valoración, percepción y referencia, los que definen una medición con instrumentos no estandarizados, los que definen una aproximación, y entre quienes explican que estimar consiste

en valorar una medida sin indicar que esta valoración posee características o algún razonamiento. Este último grupo fue el mayoritario. A continuación se muestran ejemplos de las distintas categorías:

“Es al observar o al "ojímetro" decir cuánto mide un objeto, pero teniendo un patrón antes”.

En esta respuesta podemos observar las tres componentes de la definición de estimación de medida. Cuando el maestro responde “al ojímetro”, él está indicando que el trabajo debe ser perceptivo, en este caso, visual (P), al indicar “cuánto mide” realiza la valoración (V), y finalmente, el docente explica que se debe tener “un patrón antes”, es decir, un referente (R).

“Es calcular las longitudes de los objetos, pero aproximando o utilizando instrumentos de medida no convencionales”.

Podemos observar, que el docente indica explícitamente, que esta medida se logra utilizando instrumentos de medida no convencionales (R) para poder llevar a la medida (V) por medio del cálculo (que como ya explicamos, es usado como medición). No se indica el uso de la percepción, por lo tanto, en esta respuesta, se define una medida con instrumentos no convencionales.

“Aproximar alguna medida para que sea exacto 3,9 cm= 4cm”.

En esta pregunta, podemos observar, que para el docente la estimación es una aproximación de números decimales. En este tipo de respuestas, la mayoría indicaba textualmente que se aproximaba una medida.

“Dar una medida cercana a la real”

Observamos que este docente define estimación como “dar una medida” (V), pero no explica cómo se debiese obtener esta medida, no dando espacio ni a la percepción ni a los referentes.

Resultados.

En la Tabla 3 se observa la cantidad y el porcentaje correspondiente de docentes que pertenecen a las distintas categorías.

Total	Estimación de medida.		Medición con unidad no estandarizada.	Otras respuestas.
	Con referentes propios	Con referentes auxiliares		
	18	20		
	38 (33,9%)			

Tabla 3. Resultados de la pregunta 1.

Los referentes auxiliares fueron totalitariamente la altura de los profesores. Las unidades no estandarizadas, en su mayoría, corresponden a partes del cuerpo como brazos o pasos. Los docentes también utilizaron muebles, útiles escolares y objetos del entorno.

En la Tabla 4 se observa la cantidad y el porcentaje correspondiente de docentes en las distintas categorías.

Total	Estimación indirecta con objetos auxiliares.	Medición con unidad no estandarizada.			Uso de fórmulas.	Otras respuestas.
		Bidimensional	Indirecta	De uno o dos lados de la pizarra.		
		19	43	19		
	6 (5,4%)	81 (72,3%)			12 (10,8%)	13 (11,6%)

Tabla 4. Resultados pregunta 2.

Podemos observar, que disminuyó el uso de la estimación de medida y que ningún maestro utilizó referentes propios; a diferencia de la pregunta anterior, en la que 18 maestros los utilizaron. Por otro lado, el uso de la medida indirecta es más utilizada que la medida bidimensional, los maestros prefieren las unidades longitudinales para una medición indirecta al uso de unidades de medidas

correspondientes a la superficie. Los referentes son similares a los utilizados en la pregunta anterior.

La Tabla 5 muestra la cantidad y el porcentaje correspondiente de docentes en las distintas categorías.

	Estimación con objetos auxiliares	Medición			Uso de referentes o unidades de medida	Uso de fórmulas	Otras respuestas
		Bidimensional	Indirecta	De uno o dos lados de la pizarra			
Total	6 (5,4%)	13	23	11	42 (37,5%)	3 (2,7%)	13(11,6%)
		47 (42 %)					

Tabla 5. Resultados pregunta 3.

La Tabla 6 recoge la cantidad y el porcentaje correspondiente de docentes en las distintas categorías.

	Estimación de medida	Medición	Aproximación	Valoración	Otras respuestas	Sin respuesta
Total	7 (6,25%)	9 (8%)	14 (12,5%)	76 (67,8%)	1 (0,9 %)	5 (4,4%)

Tabla 6. Resultados pregunta 4.

En esta pregunta tampoco hubo estimación de medida con referentes propios. Se observa, además, que el uso de referentes o unidades de medida, una categoría que no está en la pregunta anterior, que es bastante similar a la pregunta tres, posee la segunda mayoría.

CONCLUSIONES.

El estudio concluye que casi un 40% de los docentes participantes, en alguna de las 4 respuestas analizadas, utiliza tanto la percepción (P), la valoración (V) y la referencia (R). Estos elementos los utilizan más de una vez sólo un 11% de este 40%. Por otro lado, más del 90% de los docentes,

en alguna respuesta consideraron una medición. De esta forma, podemos observar que el conocimiento sobre la estimación de medida es contradictorio, ya que identificamos una confusión entre las actividades que requieren una estimación y aquellas que demandan una medición con unidades no estandarizadas. De acuerdo a los resultados, podemos observar, que esta contradicción se debe a que no siempre se consideran dos elementos fundamentales de la estimación de medida: la referencia y la percepción.

En la tabla 2, podemos observar, que la estimación con referentes auxiliares y la medición con unidades no estandarizadas sólo se diferencian por uno de los elementos que componen la estimación de medida: la percepción; es por ello, que los resultados muestran que las acciones de algunos grupos de profesores responden a una tarea y no a otra, como se puede observar en las tablas 3 y 4. Por otro lado, en la tabla 6, podemos observar que cuando la estimación de medida carece de razonamiento matemático y se traduce en una respuesta aleatoria en la que se da un resultado sin soporte, es porque el docente no considera que los referentes sobre unidades de medida sean fundamentales para el desarrollo de la tarea a realizar. En este caso, la percepción (P) pasa a un segundo plano, porque si no se utiliza, la tarea será una medición con unidades no estandarizadas, si se utiliza, será una adivinanza.

A raíz de lo anterior, podemos observar, que si el conocimiento del profesor de matemática sobre estimación de magnitudes, no se caracteriza por considerar la percepción (P) y la referencia (R), el concepto será confundido por otras tareas, que podrían o no, encontrar la cantidad de medida de una magnitud.

Los resultados de este estudio ponen en evidencia que es necesario que el concepto de estimación de medida se ejemplifique y contra-ejemplifique en los distintos recursos que pueda utilizar el profesor: los libros de texto, las guías gubernamentales, etc. Estos resultados pueden interpretarse desde un punto de vista más amplio, considerando aquellas reformas curriculares que incluyan nuevos contenidos o competencias a tratar en las aulas. En el caso estudiado en este trabajo, la

palabra estimación es conocida por los maestros, ya que se hace referencia a ella en diversos contextos de la vida adulta, pero las respuestas analizadas en esta investigación ponen de manifiesto que existe una distancia evidente entre la fundamentación del concepto de estimación de medida y ese conocimiento matemático fundamental necesario para poder enfrentarse a la docencia en las aulas (Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014), con lo que la formación continua se presenta como una oportunidad y una necesidad para complementar los cambios de normativa curricular, en especial, con conceptos que no han aparecido previamente en las aulas, como puede ser el caso de la programación y el pensamiento computacional en los próximos años.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. Ainley, J. (1991). Is there any mathematics in measurement? In D. Pimm y E. Love (Eds.), *Teaching and learning school mathematics* (pp. 69–76). London: Hodder & Stoughton.
2. Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
3. Bright, G.W. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*, 38, (pp. 87-104). Reston, VA: NCTM.
4. Callís, J., Fiol, M. L., Luca, C., y Callís, C. (2006). Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. Factores implícitos en la capacidad estimativa métrica. Uno: *Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 43, 91-110.
5. Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.
6. Clayton, J. G. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 87-102.

7. Clements, D. H., y McMillen, S. (1996). Rethinking “concrete” manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2, 270-279.
8. Chamorro, M. (1996). El currículum de medida en educación primaria y ESO y las capacidades de los escolares. *Uno*, 10, 43-62.
9. Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.
10. Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.
11. Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 45–55.
12. Forrester, M. A., y Pike, C. D. (1998). Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation-analytic approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 334-356.
13. Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 27-50.
14. Heller, M., Bracket, D., Salik, S., Scroggs, E., y Green, S. (2003). Objects, raised lines, and the haptic horizontal-vertical illusion. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology Section A*, 56(5), 891-907.
15. Hogan, T. P., y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280.
16. ICMI (1986). *School Mathematics in the 1990s*. Cambridge: Cambridge University Press.
17. Jones, M.G., Forrester, J.H., Gardner, Grant E., Taylor, A.R., y Andre, T. (2012). Students' Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units, and Logical Thinking. *School Science and Mathematics*, 112 (3), 171-178.
18. Jones, M. G., y Taylor, A. (2010). Developing a sense of scale: Looking backward. *Journal of Research in Science Teaching*, 46(4), 460–475.
19. Jones, G., Taylor, A., y Broadwell, B. (2009). Estimating linear size and scale: Body rulers. *International Journal of Science Education*, 31(11), 1495-1509.

20. Joram, E. (2003). Benchmarks as tools for developing measurement sense. In D. H. Clements and G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 yearbook* (pp. 57–67). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
21. Joram, E., Subrahmanyam, K., y Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research*, 68, 413–449.
22. Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4-23.
23. Lang, F. K. (2001). What is a “good guess” anyway? *Teaching Children Mathematics*, 7, 462–466.
24. Leek, E. C., Reppa, I., Rodriguez, E., y Arguin, M. (2009). Surface but not volumetric part structure mediates three-dimensional shape representation: Evidence from part–whole priming. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62(4), 814-830.
25. Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares de primero a sexto año básico*. Santiago de Chile: MINEDUC.
26. NCTM (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, VA: NCTM.
27. Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Número 91*, 91-103.
28. Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
29. Segovia, I., Castro, E., Castro, E., y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

30. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
31. Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 371–389). New York: Macmillan Publishing Company.
32. Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2), 177-198.
33. Van de Walle, J. A., Karp, K. S., y Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. USA: Pearson.

DATOS DE LOS AUTORES:

1. **Noemí Pizarro:** Doctora en Educación Matemática, imparte su docencia en la Universidad de Tarapacá (Chile). Sus intereses de investigación se centran en la formación del profesorado. Correo electrónico: npizarro@uta.cl
2. **Núria Gorgorió:** Doctora en Educación Matemática es catedrática en la Universitat Autònoma de Barcelona (España). Sus intereses de investigación abarcan la clase de matemáticas multicultural y la formación del profesorado. Correo electrónico: nuria.gorgorio@uab.cat
3. **Lluís Albarracín:** Doctor en Educación Matemática, es profesor Serra Húnter en la Universitat Autònoma de Barcelona (España). Sus intereses de investigación se centran en la modelización matemática y la formación del profesorado. Correo electrónico: lluis.albarracin@uab.cat

RECIBIDO: 13 de junio del 2017.

APROBADO: 5 de julio del 2017.