Asesorías y Tutorías para la Investigación Científica en la Educación Puig-Salabarría S.C.
José María Pino Suárez 400-2 esq a Lerdo de Tejada. Toluca, Estado de México. 7223898479
RFC: ATI120618V12

Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores.
http://www.dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/
ISSN: 2007 – 7890.
Año: IV. Número: 3. Artículo no.8 Período: Febrero – Mayo, 2017.

TÍTULO: Ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra: ejemplos y observaciones didácticas.

AUTOR:

1. Dr. Carlos Manuel Hernández Hechavarría.

RESUMEN: En la enseñanza aprendizaje de la Geometría existen múltiples insuficiencias asociadas al tratamiento de ejercicios con exigencias de orden, movilidad y construcciones que requieren una atención especial. Se ofrecen variantes de ejercicios con asistencia del GeoGebra y observaciones didácticas que contribuyen a solucionar problemas identificados en el nivel medio y primer año de carreras universitarias. Se revelan tendencias constructivas que suscitan nuevos análisis en cuanto a variantes de ejercicios, vías de solución y tratamiento didáctico, la atención diferenciada a los escolares y la estimulación de la creatividad de los escolares. Las consideraciones expuestas estimulan nuevas reflexiones en el orden didáctico.

PALABRAS CLAVES: Didáctica, Geometría, GeoGebra, orden, movilidad.

TITLE: Geometric exercises with requirements of order, mobility and construction with the assistance of GeoGebra: examples and didactic observations.

AUTHOR:

1. Dr. Carlos Manuel Hernández Hechavarría.

ABSTRACT: In the teaching of Geometry, there are multiple insufficiencies associated with the treatment of exercises with requirements of order, mobility and constructions that demand special attention. GeoGebra-assisted exercise variants and didactic observations that contribute to problem solving identified in senior high school and fist year university students are shown. Constructivists tendencies that cause new analysis concerning exercises variants, ways of solution and didactic treatment, differentiated attention to schoolchildren and stimulation to creativity to them are revealed. The considerations exposed stimulate new reflections in the didactic order.

KEY WORDS: Didactics, Geometry, GeoGebra, order, mobility.

INTRODUCCIÓN.

La enseñanza y el aprendizaje de la Geometría es un tema actual que involucra a directivos, docentes, escolares, familiares e investigadores por múltiples razones, entre ellas las siguientes: a muchos directivos y docentes les preocupan los bajos resultados, su incidencia en los índices de reprobación y calidad, y en este sentido, ofrecen criterios, indicaciones y apoyos. Escolares y familiares reconocen que la Geometría es una de las áreas de la Matemática con más dificultades, donde realizan acciones con vista a obtener mejores resultados pero no siempre obtienen los deseados.

En determinados contextos y centros escolares reiteradamente se identifican dificultades generales, ampliamente reconocidas, como los bajos resultados en Geometría en determinados tipos de exámenes, pero no se realizan estudios de profundización por especialistas que permitan profundizar en las causas que generan dichas deficiencias, y en correspondencia con ellas, proyectar estrategias adecuadas y realizar las acciones correspondientes. Para ilustrar la falta de profundidad en la determinación de las causas de las dificultades y medidas aisladas o poco integrales, se presenta sucintamente la siguiente situación y vía de solución planteada:

Situación: la dirección de un centro escolar preuniversitario reconoce que no se han alcanzado los objetivos de Geometría en el último año (duodécimo grado), y por tanto, los escolares no están preparados para realizar las preguntas de este contenido que saldrán en el examen de ingreso a la educación superior.

Vía de solución: Determinar los escolares que realizarán la prueba de ingreso, agruparlos y ponerles, en el último semestre, al profesor de mayor experiencia o resultados e incrementar el número de horas para este contenido.

Aunque por la vía de solución anterior se obtengan resultados notorios en cuanto porciento de aprobados en ese contenido, no significa que sea idónea para solucionar las dificultades esenciales que persisten en la enseñanza - aprendizaje de la Geometría; es una solución que centra la atención en el resultado de un examen para una parte de los escolares, no en el cumplimiento sistemático de los objetivos correspondientes a cada grado y etapa.

Con respecto al examen de ingreso a la educación superior, cabe destacar, que solo mide el cumplimiento de objetivos básicos, que previamente debieron vencerse y evaluarse en cada centro escolar; los ejercicios son formalmente de carácter reproductivo, y por lo tanto, resulta relativamente fácil preparar a los escolares para ese tipo de pruebas; no obstante, con vías similares a la planteada no siempre se logran resultados favorables en cuanto a porcientos de aprobados, es decir ni siquiera garantiza este aspecto.

Cuando la aspiración es superior a la obtención de resultados finales favorables en exámenes con exigencias mínimas, vías como la planteada, no son loables para la estimulación y desarrollo de capacidades, habilidades, creatividad y el pensamiento en general en los escolares; tampoco denota la utilización de medios y software modernos, probadamente superiores en muchos aspectos a los tradicionales para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Actualmente, es excepcional observar docentes que aprovechen adecuadamente el planteamiento sistemático de ejercicios y problemas geométricos con exigencias de orden para las construcciones, la movilidad de puntos o elementos de la figura, y en particular, de construcciones con asistencia del GeoGebra[1]. En intercambios sostenidos con docentes de distintas enseñanzas afloraron planteamientos que evidencian las afirmaciones anteriores, entre otros: "…estamos muy lejos de plantear ejercicios con esas exigencias…. menos en evaluaciones,….", "…ese tipo de ejercicios no aparece en los libros….", "… no tenemos orientaciones, hay falta preparación ….", "no tenemos computadoras….", "…no tenemos ese software, ni otro parecido…", "… esos tipos de ejercicios no se tratan en las preparaciones metodológicas… y para qué tratarlos sin no se evalúan….".

Los elementos antes expuestos evidencian diferentes insuficiencias y la priorización de resultados o porcientos de aprobados en exámenes sobre aspectos más esenciales del proceso de enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, que justifican la profundización en determinados aspectos de esta área de la Matemática y su mejoramiento con asistencia de algún software moderno de geometría dinámica. Las referidas insuficiencias estimularon la realización de este artículo y otros inéditos en los se exponen y ejemplifican consideraciones didácticas en los que la asistencia del GeoGebra es fundamental.

Antes de exponer los ejercicios y observaciones didácticas con asistencia del GeoGebra cabe subrayar la importancia que la comunidad científica le confiere a la geometría dinámica, que no se limita a un nivel educativo, a un software en particular, a un aspecto o área específica de la

[1] El GeoGebra es un software matemático interactivo libre que permite integrar y profundizar en distintas áreas de las matemáticas geometría, álgebra, cálculo y otras, también en la física y otras disciplinas.

Geometría, por ejemplo, con respecto a sus usos Gutierrez y Jaime (2015) afirman: Uno de los principales usos de los entornos de geometría dinámica plana es promover el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes y el aprendizaje de la demostración. Los resultados de McClintock et al. (2002) y Mithalal (2010a, 2010b) parecen indicar que sí es posible aprovechar también los programas de geometría dinámica espacial con dichos objetivos (p.57).

En la afirmación anterior, se mencionan dos propósitos importantes de la geometría dinámica y muchos otros pueden encontrarse en distintas fuentes. El autor de este artículo ha constatado su utilidad para el tratamiento de contenidos en las enseñanzas primaria, media y universitaria, algunos ejemplos aparecen en los artículos “Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones” (Hernández, 2013) y “Actividad investigativa escolar y ejercicios en matemáticas: El papalote” (Hernández, 2015), en el presente centra la atención en ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra.

DESARROLLO.

La proposición de ejercicios de construcción geométrica con exigencias en cuanto al orden en que se realiza, la movilidad de puntos y la realización de construcciones auxiliares es un tema importante que requiere mayor atención en la práctica escolar, ya que posibilita potenciar y medir el desarrollo de determinados conocimientos y habilidades, el desarrollo de la imaginación geométrica, el pensamiento lógico y otros aspectos medulares.

Para realizar una construcción geométrica determinada pueden elegirse distintas vías y orden para realizar las acciones constructivas que implica, cuando un ejercicio no tiene tales exigencias, el escolar puede seleccionar la vía que desee, la primera que encuentre sin pensar en otras que pudieran ser más racionales y originales; de esta manera resuelve el ejercicio en menos tiempo y obtiene la máxima puntuación o reconocimiento del docente. Siendo así, es necesario que el docente valore la importancia didáctica de las referidas exigencias, su repercusión en aspectos tan importantes como la racionalidad, la creatividad, el redescubrimiento y la utilización de ciertos contenidos, entre otros.

Entre las ventajas más importantes que ofrece el planteamiento de ejercicios con exigencias de orden de construcción está la posibilidad para “el aumento o disminución del nivel de dificultad del ejercicio”, por ejemplo, mediante indicaciones de orden constructivo pueden darse ideas o pautas para la realización de construcciónes complejas o inimaginables para algunos escolares, de esta manera se baja el nivel de dificultad; por el contrario, si las exigencias excluyen las vías constructivas más sencillas para los escolares, el grado de dificultad aumenta y los obliga a desarrollar una actividad investigativa favorecedora de la obtención de nuevos conocimientos y habilidades. La movilidad de puntos o partes de la figura es otro aspecto que ofrece múltiples ventajas para la enseñanza – aprendizaje de la Geometría, sobre todo si se realiza con un software de geometría dinámica.

A partir de ejercicios, variantes y soluciones de estos, que están estrechamente relacionados pero claramente distinguibles por ciertas peculiaridades, esencialmente de orden, movilidad y construcciones con asistencia del GeoGebra, se ofrecen consideraciones conducentes a un mejor tratamiento didáctico de contenidos geométricos incluyendo, entre otros elementos, la atención a tendencias constructivas desacertadas, la inadecuada aplicación de conceptos y procedimientos, y el desarrollo de habilidades, que en sentido general, contribuyen al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje, atendiendo a las particularidades de los escolares.

El ejercicio que se presenta a continuación desde su formulación plantea exigencias de orden constructivo y movilidad; la vía de solución, las observaciones didácticas y las tendencias constructivas, que se revelan, suscitan nuevos análisis didácticos en cuanto a variantes de ejercicios y soluciones que no se pretenden agotar en este artículo, pero se induce a ello, algunas justificaciones sencillas se omiten por considerarse sencillas, lo cual no significa que sean desatendidas en el orden didáctico por los docentes en la práctica escolar, atendiendo a las particularidades de los escolares.

Ejercicio 1: Construya, utilizando el Geogebra, un triángulo isósceles ABC, luego la circunferencia circunscrita a éste, y finalmente, la circunferencia tangente a la anterior y a los lados iguales del triángulo. La figura debe permitir la movilidad de los vértices del triángulo.

La construcción, realizada con el GeoGebra, que se muestra en la figura 1, fue obtenida con el siguiente orden: segmento [A, B], mediatriz del segmento [A, B], punto sobre C sobre la mediatriz; triángulo A, B, C, circunferencia que pasa por A, B, C, intersección de la mediatriz con la circunferencia (D y E), tangente a la circunferencia que pasa por E, semirrecta desde C que pasa por B, punto de intersección de la tangente y la semirrecta "F", bisectriz del ángulo B, F, E, punto de intersección de la bisectriz con la mediatriz "G", circunferencia con centro en G y punto E.

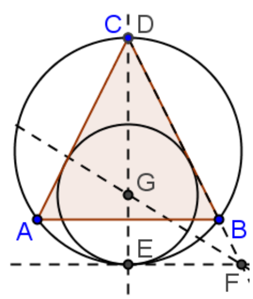

Figura 1. Construcción ejercicio 1.

Es indudable, que para expertos o escolares con una adecuada preparación matemática y conocimientos del GeoGebra, la construcción anterior no resulte novedosa y puedan realizarla con facilidad, pero experiencias desarrolladas con escolares de preuniversitario, docentes en formación y de primer año de carreras universitarias indican que no resulta fácil para la mayoría, específicamente por la determinación del centro de la circunferencia menor. Los escolares con menos preparación requirieron mayores niveles de ayuda, entre otros, presentarles o comentarles el protocolo de construcción, la figura obtenida o la figura conjuntamente con el protocolo, y algunas justificaciones para facilitar su comprensión.

Entre las tendencias constructivas negativas para determinar el centro de la circunferencia tangente a los lados iguales del triángulo y a la circunscrita a dicho triángulo se encontraron las siguientes:

- ✓ Situar un punto G en la mediatriz del lado AB y la circunferencia de centro G que pasa por E, y luego desplazar a G hasta observar que la circunferencia es tangente a los lados iguales del triángulo sin comprobar o valorar la exactitud por vías no limitadas a la observación visual o estática de la figura. Evidentemente, esta vía no garantiza una posición exacta de G, pues queda a la apreciación visual, cuestión que tampoco es reconocida por los escolares, y por tanto, no emprenden otras vías que justifiquen una posición exacta de G.
- ✓ No considerar todas las exigencias en cuanto a la movilidad de puntos, en particular la dinámica de la figura al mover los vértices del triángulo. En esta tendencia se incluyen los casos de construcciones particulares de triángulos u otras figuras, que por las razones entre sus lados, amplitudes de ángulos, la fijación de puntos con la opción del GeoGebra y otras particularidades permiten obtener con facilidad al centro de la circunferencia menor "G" sin garantizar las propiedades de la figura al mover algunos de sus puntos.
- ✓ Realizar construcciones sin el orden exigido por la carencia de ciertos conocimientos, habilidades o la creencia de que el orden no tiene mayor importancia.
- ✓ Tendencia a la ejecución inmediata sin considerar conceptos y definiciones vinculados a los datos, exigencias del ejercicio; es decir, sin los fundamentos matemáticos pertinentes. Por ejemplo, determinar a G mediante el trazado e intersección de la mediatriz del segmento EB y la bisectriz del ángulo EBC.

- ✓ En la fase inicial, cuando están buscando ideas de solución, no realizan figuras de análisis convenientes ni descomponen el problema en subproblemas para analizar aspectos específicos, obviando momentáneamente algunas exigencias de orden constructivo.

Las tendencias anteriores reflejan insuficiencias que presentan los escolares y la importancia del planteamiento y análisis de soluciones de ejercicios con exigencias constructivas en cuanto al orden que se realiza, la movilidad de puntos y la realización de construcciones auxiliares.

Lo antes expuesto, no niega la importancia o conveniencia de que los docentes planteen ejercicios con otras características o planteen nuevas interrogantes e ideas novedosas a partir de las vías utilizadas y figuras obtenidas, por ejemplo, basado en la figura 1, pudiera plantear la siguiente interrogante ¿se les ocurre alguna vía de construcción novedosa para obtener una figura semejante a la figura 1 sin tener en cuenta las exigencias de orden constructivo y de movilidad de los vértices del triángulo del ejercicio?

Una respuesta posible pudiera ser la siguiente vía: trazar un ángulo KFM con una amplitud aproximada a la del ángulo BFE de la figura 1 (no hace falta que sea igual), por ejemplo K = (1, 2), F = (2, 0) y M = (-2, 0), denotar al punto de intersección de los ejes X e Y o punto medio de MF por E = (0, 0), trazar las semirrectas FK y FE, trazar la recta que pasa por E perpendicular a FM y denotar la intersección de esta con la semirrecta FK por C. Trazar la circunferencia que pasa por E con centro en el punto medio de CE (será la circunscrita al triángulo ABC, denotar por B al punto de intersección de FK con la circunferencia, trazar por B una paralela a FE y denotar por A al punto de intersección de esta con la circunferencia). Trazar la bisectriz del ángulo KFM y denotar con G la intersección de esta con CE, trazar la circunferencia que pasa por E con centro G.

La vía descrita anteriormente, aunque pudiera parecer engorrosa, puede realizarse fácilmente con asistencia del GeoGebra, y para evitar movimientos involuntarios de algunos puntos durante su construcción, que pudieran afectar la obtención de la figura, es conveniente fijarlos con la opción del GeoGebra con este fin. La ubicación conveniente de los puntos posibilitará identificar visualmente en la vista algebraica y la vista gráfica las coordenadas de los centros de las circunferencias, longitud de los radios y otros datos.

Muchas otras variantes e ideas pudieran surgir a partir de figuras obtenidas, manteniendo o suprimiendo algunas de las exigencias planteadas, que estimulan la creatividad en los escolares. La variedad de ejercicios o variantes, desde su formulación, tiene especial importancia en el proceso enseñanza – aprendizaje, y para su dilucidación, se mostrarán ejercicios estrechamente relacionados con el anterior, con variantes de formulación, exigencias y vías de solución que promueven y respaldan comparaciones y reflexiones didácticas que sirven de modelo.

Ejercicio 2: Un triángulo isósceles HJG de base HJ está inscrito en una circunferencia de diámetro 1, una circunferencia de radio menor es tangente a los lados iguales del triángulo y a la circunferencia circunscrita a este. Si la razón entre la altura y la base del triángulo es 1, determine la longitud del radio de la circunferencia menor con el GeoGebra.

Nótese que existen diferencias esenciales entre este ejercicio y el anterior, en este no existen exigencias para la construcción de una figura, y por tanto, se puede realizar de distintas maneras, entre otras, utilizando una figura de análisis, una figura incompleta o no realizar ninguna construcción bajo determinadas justificaciones o procedimientos que permitan omitirla sin afectar la explicación de la solución, pues es un ejercicio geométrico de cálculo, donde el propósito es determinar la longitud del radio de una circunferencia.

La omisión de figuras o partes de ellas generalmente demanda el desarrollo de ciertas capacidades, habilidades y conocimientos, en particular, de imaginación geométrica y representación mental, el establecimiento de vínculos entre distintos contenidos matemáticos y el aprovechamiento de las facilidades constructivas del software o medios a utilizar.

Una vía de solución que puede ilustrar lo antes expuesto o tomarse como punto de partida para reflexiones didácticas es la que se muestra en el protocolo de construcción presentado en la tabla 1, y la figura 2 que es la resultante.

Tabla 1. Protocolo de construcción de la figura 2.

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto de intersección de EjeX, EjeY	A = (0, 0)
2	Punto B	Punto sobre EjeX	B = (1, 0)
3	Polígono polígono1	Polígono[A, B, 4]	polígono1 = 1
3	Segmento a	Segmento [A, B] de Polígono polígono1	a = 1
3	Segmento b	Segmento [B, C] de Polígono polígono1	b = 1
3	Punto C	Polígono[A, B, 4]	C = (1, 1)
3	Punto D	Polígono[A, B, 4]	D = (0, 1)
3	Segmento c	Segmento [C, D] de Polígono polígono1	c = 1
3	Segmento d	Segmento [D, A] de Polígono polígono1	d = 1
4	Punto E	Punto medio de c	E = (0.5, 1)
5	Recta e	Bisectriz de B, A, E	e: -0.53x + 0.85y = 0
6	Recta f	Bisectriz de A, B, E	f: -0.53x - 0.85y = -0.53
7	Punto F	Punto de intersección de e, f	F = (0.5, 0.31)
8	Número distancia Fa	Distancia de Fa	Distancia Fa = 0.31

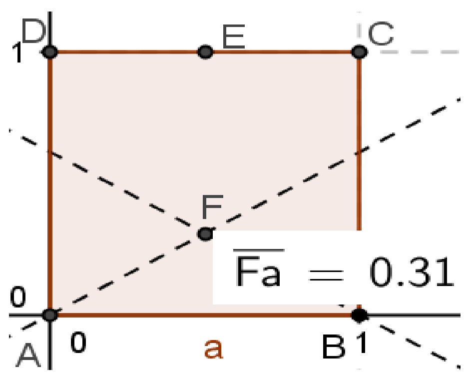

Figura 2. Construcción del ejercicio 2.

Como puede apreciarse, en la vía anterior, se omiten figuras involucradas y justificaciones, sin que afecte el objetivo de determinar el radio de la circunferencia menor con el GeoGebra, que es la distancia de F al lado AB (0.31). La no representación de figuras declaradas en el enunciado del ejercicio y justificaciones no significa que dejaron de considerarse.

El análisis de la vía anterior por los docentes pude suscitar diversos criterios didácticos y valoraciones sobre su obtención y utilización en distintos contextos e instituciones escolares. Es muy probable que los primeros criterios estén referidos a la racionalidad de la vía de solución presentada, la omisión de figuras involucradas, la ubicación y notación de puntos, la justificación de procedimientos y otros aspectos formales, el nivel de complejidad del ejercicio y dificultades para su comprensión. También puede revelar creencias de docentes y necesidades en cuanto a la preparación metodológica.

La racionalidad y omisiones en esta vía de solución tienen un carácter intencional, dirigido a la estimulación de los docentes para la realización de análisis constructivos y didácticos con vista al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje, pues los contenidos y procedimientos matemáticos necesarios son básicos, al igual que los concernientes al GeoGebra. El autor de este artículo, en cursos impartidos e intercambios sostenidos con docentes, ha constado el favorable impacto de la presentación y análisis de soluciones con tales características.

Con el GeoGebra resulta muy sencillo y rápido representar todas las figuras involucradas, destacar elementos mediante colores, grosor de líneas y otros aspectos que obviamente facilitan su comprensión y explicación; ejemplos de estos complementos se muestran en la figura 3: con línea continua, el triángulo y las dos circunferencias; con líneas discontinuas, construcciones auxiliares; y con color rojo, los radios de tangencia de la circunferencia menor con la mayor y los lados iguales del triángulo. Adicionalmente, se muestra el centro de la circunferencia mayor y la distancia entre los centros de ambas circunferencias calculados con el GeoGebra.

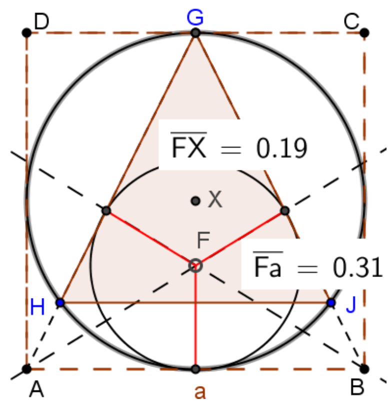

Figura 3. Muestra figuras involucradas y complementos.

Esta figura 3 supera en detalles a la figura 2, lo que permite esclarecer y facilitar la explicación de aspectos y fundamentos no revelados de manera explícita anteriormente, en especial: la construcción del triángulo HJG y la circunferencia mayor a partir del cuadrado ABCD, igualmente el trazado de las bisectrices y la circunferencia menor.

La exigencia de que “la razón entre la altura y la base del triángulo es 1”, estimula ideas y análisis que posibilitan “la construcción del triángulo HJG y la circunferencia mayor a partir de un cuadrado de lado 1”, en este caso, situando a G en el punto medio del lado CD, determinando el centro de la circunferencia inscrita “X”, aprovechando la opción de punto medio del GeoGebra y trazando la circunferencia con centro en este que pasa por G.

Los vértices H y J pueden obtenerse mediante la intersección de los segmentos GA y GB con la circunferencia pues de esta manera se garantiza que esté inscrito en la circunferencia y, por su semejanza con el triángulo ABC, que sea isósceles y la razón entre la base y la altura. El trazado de dos bisectrices del triángulo ABG permite determinar, en su intersección, el centro de la circunferencia menor “F”, es decir, de la que es tangente a los lados iguales y a la circunferencia mayor. Los radios de tangencia se destacan en la figura con color rojo.

Aunque la figura 2 y elementos presentados superan los brindados en la primera, pueden requerirse otros en dependencia de las particularidades de los escolares, igualmente explicaciones o demostraciones, que por considerarse sencillas e irrelevantes para este artículo, no se exponen, por ejemplo la semejanza de los triángulos HJG y ABC y la longitud del diámetro de la circunferencia mayor.

Existen otras alternativas de solución sin considerar un cuadrado en el que esté inscrita la circunferencia circunscrita al triángulo que conjugan la utilización del GeoGebra con procedimientos algebraicos, por ejemplo, con conocimientos básicos de semejanza puede determinarse la razón entre la altura del triángulo y el diámetro de la circunferencia y de aquí realizar una construcción conveniente con el GeoGebra que permita identificar con facilidad el radio de la circunferencia inscrita. Un ejemplo de las referidas alternativas de construcción se muestra en la figura 4 y no se detalla, en este artículo, teniendo en cuenta que es fácilmente comprensible a partir del protocolo de construcción mostrado en tabla 2, además por el efecto positivo que puede provocar su análisis en docentes y escolares.

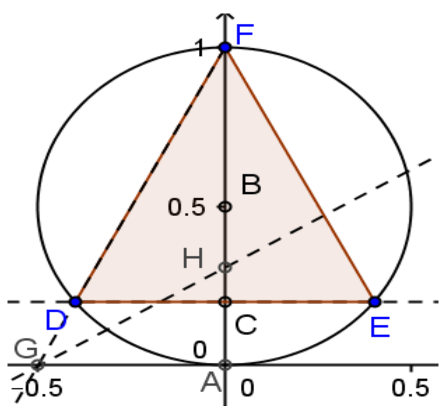

Figura 4. Sin el cuadrado en que está inscrita.

Tabla 2. Protocolo de construcción de la figura 4.

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto de intersección de EjeX, EjeY	A = (0, 0)
2	Punto B	Punto sobre EjeY	B = (0, 0.5)
3	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por A con centro B	c: $x^2 + (y - 0.5)^2 = 0.25$
4	Punto C	Punto sobre EjeY	C = (0, 0.2)
5	Recta a	Recta que pasa por C paralela a EjeX	a: y = 0.2
6	Punto D	Punto de intersección de c, a	D = (-0.4, 0.2)
6	Punto E	Punto de intersección de c, a	E = (0.4, 0.2)
7	Punto F	Punto de intersección de c, EjeY	F = (0, 1)
8	Triángulo polígono1	Polígono D, E, F	polígono1 = 0.32
8	Segmento f	Segmento [D, E] de Triángulo polígono1	f = 0.8
8	Segmento d	Segmento [E, F] de Triángulo polígono1	d = 0.89
8	Segmento e	Segmento [F, D] de Triángulo polígono1	e = 0.89
9	Semirrecta b	Semirrecta que pasa por F, D	b: 0.8x - 0.4y = -0.4
10	Punto G	Punto de intersección de b, EjeX	G = (-0.5, 0)
11	Recta g	Bisectriz de EjeX, b	g: 0.85x + 0.53y = -0.43
11	Recta h	Bisectriz de EjeX, b	h: -0.53x + 0.85y = 0.26
12	Punto H	Punto de intersección de EjeY, h	H = (0, 0.31)

Entre los múltiples aspectos, que puntualmente pudieran generar observaciones didácticas y nuevas variantes por los docentes sobre la alternativa anterior, para la resolución del ejercicio están:

✓ La ubicación conveniente de puntos sobre los ejes de coordenadas para facilitar la construcción, observaciones de longitudes y cálculos a partir de la vista algebraica del GeoGebra, pues muestra las coordenadas de puntos cardinales de la figura, y en algunos casos, de manera explícita, longitudes de lados, ecuaciones y otros elementos. La ubicación conveniente de puntos permite obviar la realización de procedimientos algebraicos.

- ✓ La determinación del punto C, para el trazado del triángulo con conocimientos básicos de semejanza, a partir de los triángulos rectángulos FDA, FCD, DCA y el diámetro AF=1, puede determinarse fácilmente la razón entre la altura del triángulo y el diámetro de la circunferencia (4/5) y que AC=1/5. También puede aprovecharse para ilustrar la relación o combinación de procedimientos algebraicos y geométricos sencillos con el GeoGebra, por ejemplo partiendo de una construcción de análisis, que muestre los triángulos determinados por A, D, F y C, como en la figura 5, considerando la semejanza de los triángulos FCD y DCA puede plantearse, en función de una variable X, la relación entre las longitudes FC=2X, CD=X y CA=X/2, y de aquí, obtener AC=0,2, CF=0,8 CD=0,4 utilizando AF=1 y la razón entre lados homólogos o el reconocimiento y solución de alguna ecuación involucrada, por ejemplo, de la ecuación, 2X+ X/2=1, se obtiene X=0,4 y de aquí los valores de AC, CF y CD.

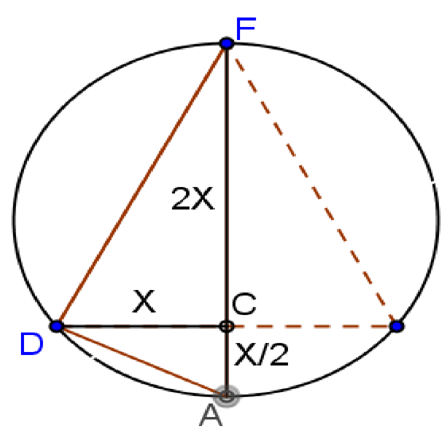

Figura 5. Construcción de análisis.

- ✓ La semirrecta FD y su intersección con el eje X, para constatar longitudes implicadas. El trazado de la bisectriz y el reconocimiento de la ordenada de H como radio (0,31) de la circunferencia menor. Especial reflexión pudiera suscitar el no renombrar los puntos D, E y F por H, J y G con vista a facilitar su comprensión por los escolares, pero debe quedar claro el propósito del ejercicio, y desde aquí, cuestionar o no la necesidad de dicho renombramiento, el cual puede efectuarse fácilmente.

- ✓ La importancia de realizar ilustraciones, modificaciones, justificaciones y explicaciones no contempladas en este artículo, que resulten necesarias o convenientes acorde a las necesidades y potencialidades de los escolares, es decir, no limitarse a detallar o simplificar los aspectos mencionados, pudieran estar dirigidas a aumentar las exigencias para estimular a los escolares mejor preparados o con mayores potencialidades, por ejemplo, pudiera resultar estimulante mostrar la figura 6, con elementos conformes a la figura 3, que omite detalles respecto a esta y que es posible obtenerla mediante procedimientos diferentes y con fines diferentes, por ejemplo, utilizando semejanza de triángulos y sin trazar semirrectas y otras ideas constructivas.

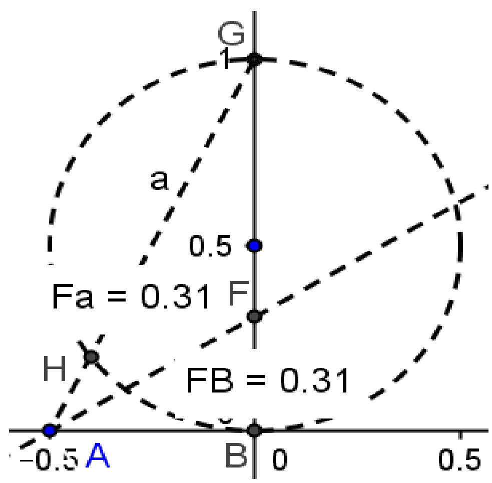

Figura 6. Omite detalles con procedimientos diferentes.

La figura anterior pudiera constituir un estímulo visual para sugerirles a determinados escolares, con cierta preparación, una vía de solución, pues es posible complementarla con otros elementos para la identificación de una vía o visualizar elementos contemplados en el enunciado del ejercicio, por ejemplo, trazando una perpendicular al diámetro GB que corte a H, se podrán identificar a J, pues es el simétrico de H respecto a GB, y así visualizar el triángulo mencionado, aunque no sea necesaria esta construcción para solucionar el ejercicio. Esta figura también pudiera promover la idea de considerar el triángulo con vértices en G, A y el simétrico A respecto al eje de las ordenadas, a partir de que “la razón entre la altura y la base del triángulo es 1” y de aquí la ubicación de H, que son aspectos básicos para encontrar una vía de solución.

Aunque los ejemplos y consideraciones didácticas mostradas sobre este ejercicio pueden parecer abundantes, no agotan las alternativas y están encaminadas a promover la reflexión y creatividad en escolares y docentes, a que realicen modificaciones acorde a las necesidades y potencialidades de los escolares desde el enfoque investigativo en la enseñanza - aprendizaje.

El enfoque investigativo puede implementare en la enseñanza - aprendizaje con diferentes propósitos y alcance, por ejemplo, para el esclarecimiento de dudas en escolares con insuficiente desarrollo de habilidades e imaginación pudiera inducirse un proceso investigativo de los escolares mediante fragmentos se las figuras 2 y 3, comentarios y preguntas iniciales sugerentes con vista a que emprendan las actividades investigativas acorde a las necesidades diagnosticadas y el aprovechamiento de vías y figuras precedentes. Lo antes expuesto subraya el carácter contextual, relacional y dinámico del enfoque investigativo, como ejemplo de posibles comentarios y preguntas sugerentes pueden estar los siguientes:

- ✓ Si la longitud del diámetro de la circunferencia y de los lados del cuadrado es 1 ¿Cuál de los diámetros que podemos identificar pudiera sugerir una vía de solución?” pues es bastante probable que identifiquen al diámetro con extremos en E y el punto medio del lado AB, es fácil reconocer que la razón entre la altura y la base del triángulo ABE es 1 y de aquí los vértices H y J por las intersecciones de EA y EB con la circunferencia; posteriormente reconocer que el incentro del triángulo ABE es el centro de la circunferencia menor, para luego determinar su radio.

Si bien en la ejemplificación anterior se da la opción de escoger convenientemente fragmentos de figuras anteriores, no niega que puedan emplearse otras alternativas que no dependan estrictamente de ellas o que tengan que conocerse con anterioridad; en la práctica escolar se elaboran según las particularidades de los escolares y la dinámica del proceso de solución del ejercicio, es decir, no existe una figura conveniente para todos los casos. Una posible, pudiera ser la figura 7, con la salvedad de que las posiciones o notaciones de los puntos G, H y K no coinciden exactamente con los de las figuras 2 y 3, aspecto no es esencial para las consideraciones didácticas que exponen dirigidas a los docentes, pero sí resulta esencial en los análisis que realicen los docentes atendiendo a las particularidades de sus escolares con vistas a su comprensión.

El estudio del protocolo de construcción de la figura 7, expuesto en la tabla 3, también pudiera promover importantes observaciones y razonamientos matemáticos por buena parte de los escolares, entre otras razones por la identificación y establecimiento de relaciones entre las coordenadas de los puntos, por ejemplo, que la ordenada de F es el radio de la circunferencia y no es necesario utilizar otro procedimiento adicional para determinarlo.

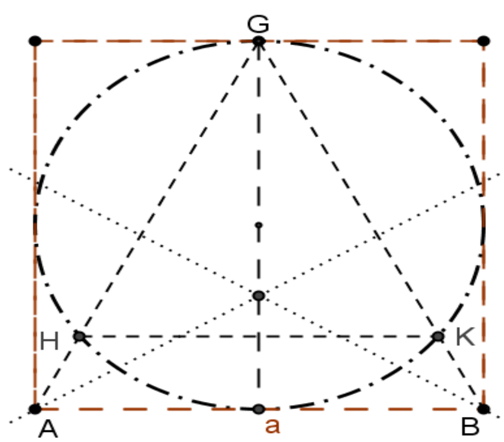

Figura 7. Figura de apoyo

Tabla 3. Protocolo de construcción de la figura 7.

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto de intersección de EjeX, EjeY	A = (0, 0)
2	Punto B	Punto sobre EjeX	B = (1, 0)
3	Polígono polígono1	Polígono[A, B, 4]	polígono1 = 1
3	Segmento a	Segmento [A, B] de Polígono polígono1	a = 1
3	Segmento b	Segmento [B, C] de Polígono polígono1	b = 1
3	Punto C	Polígono[A, B, 4]	C = (1, 1)
3	Punto D	Polígono[A, B, 4]	D = (0, 1)
3	Segmento c	Segmento [C, D] de Polígono polígono1	c = 1
3	Segmento d	Segmento [D, A] de Polígono polígono1	d = 1
4	Punto G	Punto medio de c	G = (0.5, 1)
5	Recta e	Bisectriz de B, A, G	e: -0.53x + 0.85y = 0
6	Recta f	Bisectriz de A, B, G	f: -0.53x - 0.85y = -0.53
7	Punto F	Punto de intersección de e, f	F = (0.5, 0.31)
8	Número distancia Fa	Distancia de F a a	Distancia Fa = 0.31
9	Segmento h	Segmento [G, A]	h = 1.12
10	Segmento i	Segmento [G, B]	i = 1.12
11	Punto L	Punto medio de a	L = (0.5, 0)
12	Segmento g	Segmento [G, L]	g = 1
13	Punto E	Punto medio de G, L	E = (0.5, 0.5)
14	Circunferencia k	Circunferencia que pasa por G con centro E	k: $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = 0.25$
15	Punto H_1	Punto de intersección de k, h	$H_1 = (0.5, 1)$
15	Punto H	Punto de intersección de k, h	H = (0.1, 0.2)
16	Punto J	Punto de intersección de k, i	J = (0.5, 1)
16	Punto K	Punto de intersección de k, i	K = (0.9, 0.2)
17	Segmento j	Segmento [H, K]	j = 0.8

Ejercicio 3: Construya, con el GeoGebra, una circunferencia inscrita en un cuadrado con lados de 4u, un triángulo rectángulo inscrito en ella cuyo lado menor sea la mitad del mayor, posteriormente construye la circunferencia tangente interiormente a la primera y a los lados menores del triángulo. Si logras encontrar varias vías, incluso sin utilizar el GeoGebra, escríbelas y compáralas.

Aunque este ejercicio puede parecer poco exigente por estar referido a un caso particular de cuadrado, pues está dada la longitud de sus lados por un número natural, presenta una exigencia importante para un alto por ciento de escolares de la enseñanza media y del primer año de carreras universitarias "determinar el centro de la circunferencia interior tangente a la mayor y a los lados menores del triángulo”, además de la exigencia de orden, pues la construcción de la circunferencia menor debe realizarse después de la circunferencia mayor, el cuadrado y el triángulo, lo cual impide la utilización de vías más sencillas. Las observaciones didácticas para la utilización del GeoGebra en este ejercicio reflejan aspectos cardinales.

La construcción de la circunferencia inscrita en un cuadrado con lados de 4 unidades, un triángulo rectángulo inscrito en ella, cuyo lado menor es la mitad del mayor, es fácilmente entendible y realizable por los escolares, pero la última construcción exigida no, es decir “construir una nueva circunferencia tangente a la antes construida y a los lados menores del triángulo”, constituye un problema para la mayoría de los escolares, aspecto corroborado por el autor de este artículo en duodécimo grado y el primer año de dos carreras universitarias.

Si no se diera la posibilidad de utilizar el GeoGebra u otro software que facilite las construcciones, actividades exploratorias, visualización de las transformaciones y comparaciones en un ambiente dinámico, sería más complejo aún esta última parte del ejercicio, no solo conllevaría al incremento del tiempo para resolverlo, también a ponderar la utilización de vías analíticas más complejas para las cuales los escolares no están suficientemente preparados y no cuentan con los medios constructivos necesarios; también pudiera inducirlos a utilizar otras vías menos racionales o que pueden considerarse complementarias atendiendo a los objetivos de los programas de estudio.

Aunque el GeoGebra facilita considerablemente la solución del ejercicio no significa que deje de ser un problema para los escolares, por tanto, al docente le corresponde ofrecerles los impulsos pertinentes en dependencia de sus particularidades. La actividad investigativa por los escolares, para la búsqueda de una vía de solución con el GeoGebra, y que posteriormente pueden formalizar, es de suma importancia. Algunas actividades exploratorias investigativas y observaciones, teniendo como referente la figura 8, se muestran a continuación:

- ✓ Trazar la bisectriz del ángulo recto del triángulo inscrito en la circunferencia y situar un punto deslizable sobre ella, teniendo en cuenta que equidista de los lados menores. Trazar una recta perpendicular a uno de los lados menores del triángulo que contenga al punto "J" para determinar, en su intersección, el punto de tangencia "K" con el lado menor. Trazar la circunferencia con centro en J que pasa por K. Desplazar a J para observar la posición en que la circunferencia es tangente simultáneamente a los lados menores del triángulo y a la circunferencia mayor.
- ✓ Considerando que la observación visual no garantiza una construcción exacta, resultan convenientes otros elementos que brinden información complementaria, tanto visuales como de cálculos con vista al perfeccionamiento de la construcción y la vía de solución, por ejemplo: Destacar la longitud del radio JK, mostrando su longitud y/o segmento resaltado con algún color. Trazar la semirrecta EJ y determinar su punto "L" de intersección con la circunferencia mayor, y mostrar la longitud JL. También puede resaltarse el segmento JL con algún color.
- ✓ Al desplazar a J, podrá observar, que para distintas posiciones J muy próximas, aparentemente las circunferencias tienen un solo punto de contacto; sin embargo, las longitudes de los segmentos JL y JK son distintas, algo imposible. Podrá corroborar que algunas construcciones, como esta, basadas solamente en la visualización gráfica y sin otros fundamentos, tiene menos probabilidades de exactitud que cuando se ajusta con otros recursos o elementos. La construcción descrita conduce a la figura 8.

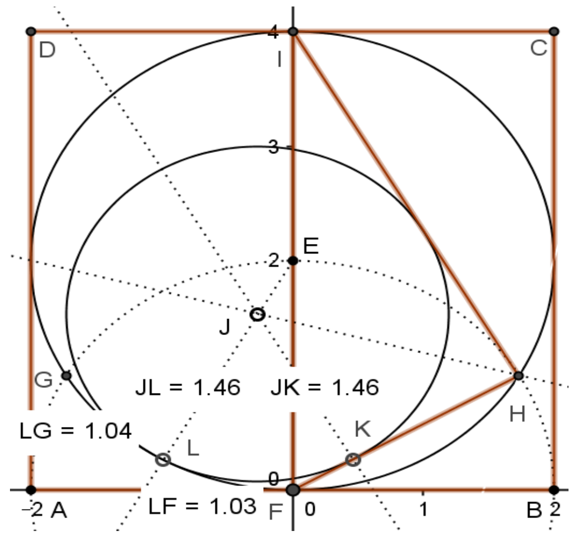

Figura 8. Construcción descrita.

✓ La figura anterior también puede generar determinadas hipótesis, propio de la actividad investigativa, por ejemplo, que el punto de tangencia de las circunferencias se encuentra en el punto medio del arco FG, aspecto que debe esclarecerse y por tanto genera una nueva actividad investigativa que puede comenzar por determinadas comprobaciones. Si es cierta la hipótesis, entonces la longitud de los segmentos LG y LF deben ser iguales; sin embargo, en la figura 8 puede observarse que no lo son, aspecto que genera interrogantes, entre otras ¿no será producto de que se buscó la igualdad de los segmentos JL y JK mediante el deslizamiento manual de J, y por tanto la igualdad de longitud reflejada JL=JK=1.46 es correcta considerando solo dos lugares decimales?, ¿no será producto de un aproximación automática del software?, ¿no sería producto de otro error constructivo anterior?, ¿cuáles vías pudieran servir para salir de dudas?

Es posible que con las ideas obtenidas mediante la actividad investigativa desarrollada y considerando las interrogantes finales algún escolar plantee una variante de solución más directa, que no requiera deslizar cuidadosamente algún punto para determinar otro, como mover J para encontrar el punto de tangencia de ambas circunferencias, que le permita hacer determinados cotejos y corroborar suposiciones, por ejemplo, la igualdad de las longitudes LG y LF, aunque no necesariamente en la misma figura ni con la misma denominación.

Una de las referidas variantes de solución puede ser: trazar el cuadrado ABCD, situando el vértice A en el origen de coordenadas, B en el eje X a cuatro unidades del origen y completándolo como polígono regular, luego el centro de la circunferencia inscrita E, los puntos medios de dos lados paralelos "F y G" que determinarán la hipotenusa del triángulo FGH. Mediante la intercepción de la circunferencia que tiene centro en F y radio 2, con la primera, se determina el vértice H del triángulo y el punto I. La intersección "J" de la mediatriz de IF con la bisectriz del ángulo GHF es el centro de la circunferencia buscada y la intersección con la circunferencia inscrita en el cuadrado "K" es el punto de tangencia entre ambas, con los cuales se traza. La figura 9 y su protocolo de construcción, expuesto en la tabla 4, brindan detalles de la vía comentada.

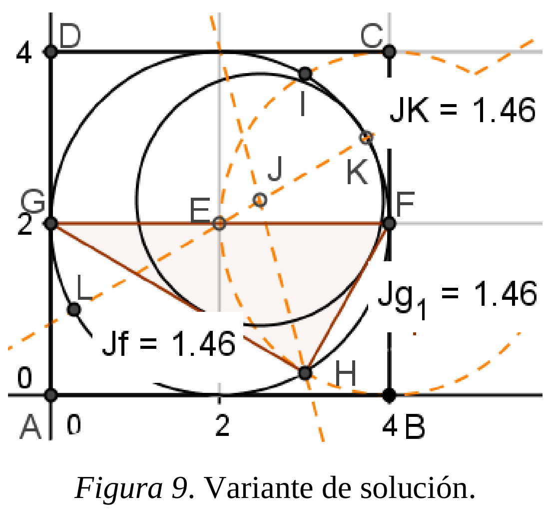

Figura 9. Variante de solución.

Tabla 4. Protocolo de construcción de la figura 9.

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto de intersección de EjeX, EjeY	A = (0, 0)
2	Punto B	Punto sobre EjeX	B = (4, 0)
3	Polígono CuadradoABCD	Polígono[A, B, 4]	CuadradoABCD = 16
3	Segmento a	Segmento [A, B] de Polígono CuadradoABCD	a = 4
3	Segmento b	Segmento [B, C] de Polígono CuadradoABCD	b = 4
3	Punto C	Polígono[A, B, 4]	C = (4, 4)
3	Punto D	Polígono[A, B, 4]	D = (0, 4)
3	Segmento c	Segmento [C, D] de Polígono CuadradoABCD	c = 4
3	Segmento d	Segmento [D, A] de Polígono CuadradoABCD	d = 4
4	Punto E	Punto medio de A, C	E = (2, 2)
5	Circunferencia e	Circunferencia con centro E y radio 2	e: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
6	Punto F	Punto medio de b	F = (4, 2)
7	Punto G	Punto medio de d	G = (0, 2)
8	Circunferencia g	Circunferencia con centro F y radio 2	g: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$
9	Punto H	Punto de intersección de g, e	H = (3, 0.27)
9	Punto I	Punto de intersección de g, e	I = (3, 3.73)
10	Triángulo Triángulo FGH	Polígono F, G, H	TriánguloFGH = 3.46
10	Segmento h	Segmento [F, G] de Triángulo Triángulo FGH	h = 4
10	Segmento f	Segmento [G, H] de Triángulo Triángulo FGH	f = 3.46
10	Segmento g_1	Segmento [H, F] de Triángulo Triángulo FGH	$g_1 = 2$
11	Recta i	Bisectriz de f, g_1	i: -0.26x + 0.97y = -0.52
11	Recta j	Bisectriz de f, g_1	j: -0.97x - 0.26y = -2.97
12	Recta k	Mediatriz de FI	k: x - 1.73y = -1.46
13	Punto J	Punto de intersección de k, j	J = (2.46, 2.27)
14	Punto K	Punto de intersección de e, k	K = (3.73, 3)
14	Punto L	Punto de intersección de e, k	L = (0.27, 1)
15	Circunferencia p	Circunferencia que pasa por K con centro J	p: $(x - 2.46)^2 + (y - 2.27)^2 = 2.14$
16	Número distanciaJK	Distancia de J a K	distanciaJK = 1.46
17	Texto TextoJK	Nombre[J] + (Nombre[K]) + " = " + distanciaJK	JK = 1.46
18	Número distanciaJf	Distancia de J a f	distanciaJf = 1.46
19	Texto TextoJf	Nombre[J] + (Nombre[f]) + " = " + distanciaJf	Jf = 1.46
20	Número distanciaJg1	Distancia de J a g_1	distanciaJg1 = 1.46
21	Texto TextoJg1	Nombre[J] + (Nombre[g_1]) + " = " + distanciaJg1	Jg_1 = 1.46

Además de los nexos existentes, entre las dos variantes de solución explicadas anteriormente con enfoque investigativo posible a desplegarse por los escolares, es beneficioso que los docentes reflexionen sobre las particularidades de ejercicios como éstos; criterios didácticos específicos y consideraciones generales con vista a su ajuste, atendiendo a las particularidades de los escolares a que van dirigidos. Entre las consideraciones generales pueden destacarse las siguientes:

- ✓ Para realizar un tratamiento didáctico con carácter diferenciado, es necesario prever los impulsos más apropiados que se les brindará a los escolares, atendiendo a las vías y los errores que cometan, sus conocimientos, habilidades y potencialidades, pero sin considerar dichos impulsos como recetas cerradas descontextualizadas, pues en la práctica se dan disímiles situaciones y aspectos no esperados que exigen creatividad en los docentes. Respetar las iniciativas y vías utilizadas por los escolares sin dejar de realizar las observaciones y aclaraciones pertinentes es fundamental para no frenar su creatividad en la solución de ejercicios.

Con respecto a las particularidades de estos ejercicios,

- ✓ La construcción de una circunferencia inscrita en un cuadrado con lados de 4u resulta sencilla y existen distintas vías aunque no todas igualmente racionales en cuanto al número de acciones. La construcción del triángulo rectángulo y el reconocimiento de que el centro de la circunferencia buscada se encuentra sobre la bisectriz de los lados menores tampoco resulta complejo para la mayoría de los escolares y existen distintas alternativas, desde la más estáticas hasta las que permiten el movimiento de puntos sin que se afecte la figura; este aspecto de las construcciones debe valorarse por el docente, si está asociado a un nivel de abstracción superior del escolar o no, si no utiliza determinada alternativa por desconocimiento o porque otra más específica le permite cumplir la exigencia del ejercicio de manera más sencilla. Esta observación es muy importante pues en algunos casos se ponderan injustificadamente determinadas vías, que aunque sean más generales o inesperadas, no constituyen exigencias del ejercicio y tampoco facilitan la solución.

- ✓ La mayor exigencia de este ejercicio radica en determinar los puntos que equidistan de la circunferencia y de los lados menores del triángulo pues no se limita al uso elemental de las definiciones y objetivos esenciales de los programas de matemática vigentes en la enseñanza media superior, requiere una aplicación de conocimientos, lo cual constituye un problema para la mayoría de los escolares, aspecto corroborado por el autor de este artículo en escolares de duodécimo grado y de primer año de dos carreras universitarias.
- ✓ En la solución presentada no se justifican los procedimientos utilizados para determinar el centro de la circunferencia tangente interiormente a la primera y a los lados menores del triángulo. Con vista a que los escolares lo identifiquen pudieran resultar beneficiosos impulsos consistentes interrogantes, como los siguientes: ¿estará el centro de la circunferencia interior entre el centro de la mayor y el punto de tangencia?, ¿qué relación existe entre la recta que contiene al segmento IF y la tangente a la circunferencia en K, sugiere este aspecto alguna construcción auxiliar?, ¿cuáles ángulos y segmentos pudieran resultar importantes para el análisis?
- ✓ La construcción realizada no permite movimientos de puntos manteniendo las propiedades o exigencias, al mover el vértice B se pierden las propiedades, aspecto que pudiera aprovecharse para realizar nuevas observaciones e inferencias. Pueden realizarse algunas construcciones auxiliares para realizar observaciones e inferencias con vista a obtener ideas importantes sobre la vía de solución, por ejemplo, situar un punto deslizable sobre la bisectriz y segmentos de perpendiculares desde este hasta los lados menores del triángulo, también segmentos desde este puno hasta la circunferencia contenidos en rectas que contengan al centro de la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD, además tangentes a la circunferencia en los extremos de estos

segmentos. En la figura 10 se ilustran algunos elementos, el punto X sobre la bisectriz que al moverlo hace cambiar la longitud de los referidos segmentos desde este.

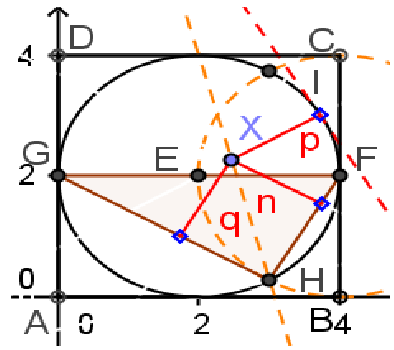

Figura 10. Construcciones auxiliares.

Muchas otros detalles y acciones pueden realizarse con el GeoGebra: reflexión axial, ángulos, visualización de longitudes de segmentos, amplitudes de ángulos uso de colores y otros, con vista a la obtención de la vía de solución o facilitar la atención a las diferencias de los escolares, pero atendiendo a las particularidades de los escolares el docente debe valorar la conveniencia o no de ciertos detalles que pudieran resultar contraproducentes para el desarrollo de sus capacidades y habilidades.

Nuevas exigencias sobre la movilidad de puntos de la figura puede complejizar el ejercicio, por ejemplo, una variante del ejercicio 3 puede ser: “Construye, con el GeoGebra, una circunferencia inscrita en un cuadrado con lados de 8u, un triángulo rectángulo inscrito en ella que perita la movilidad de sus vértices y cuyo lado menor sea la mitad del mayor, posteriormente construye la circunferencia tangente interiormente a la primera y a los lados menores del triángulo. Nótese que esta nueva formulación se diferencia esencialmente de la anterior en que “La figura debe permitir la movilidad de los vértices del triángulo sobre la circunferencia sin afectar sus propiedades”, pues el cambio de la longitud de los lados del cuadrado no implica cambios procedimentales en la solución.

Para la atención diferenciada a los escolares con dificultades en la realización de la construcción pudiera resultar beneficioso presentar una figura que ilustre o sugiera una vía de solución, por ejemplo, en la figura 11 se destaca un punto F deslizable sobre la circunferencia, los centros de las circunferencias implicadas en la construcción A, L e I; M que es el punto medio del arco IG y punto de tangencia de las circunferencias.

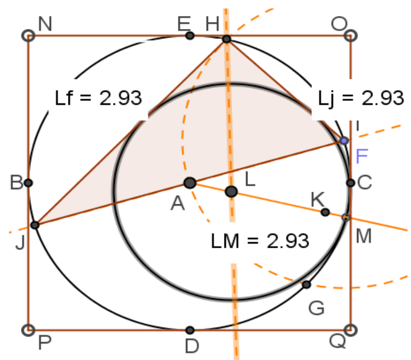

Figura 11. Sugiera una vía de solución.

Determinar el momento, la forma y comentarios, a partir de la figura, es otro aspecto esencial, en correspondencia con las necesidades y potencialidades de los escolares, por ejemplo, para algunos pudiera resultar suficiente analizar individualmente esta figura de manera estática, otros pudieran requerir una mayor actividad investigativa partiendo de ella, recibir explicaciones sobre los puntos y construcciones auxiliares que refleja y además manipular la construcción realizada por el docente para descubrir relaciones y comprender la vía de solución.

La última petición del ejercicio 3, “Si logras encontrar varias vías, incluso sin utilizar el GeoGebra, escríbelas y compáralas”, pudiera arrojar valiosos resultados sobre distintos aspectos que intervienen en el proceso enseñanza – aprendizaje, y la resolución de este ejercicio en particular; entre otras, la motivación e interés por la búsqueda y comparación de diferentes alternativas de solución, capacidades y habilidades matemáticas, el tiempo y medios que utilizan los escolares, y el desarrollo de su creatividad. A continuación se comenta brevemente una variante en la vía de solución que en determinado contexto pudiera denotar conocimientos y habilidades relativamente altos de un escolar.

La primera parte del ejercicio “construir con el GeoGebra, una circunferencia inscrita en un cuadrado con lados de 8u, un triángulo rectángulo inscrito en ella que perita la movilidad de sus vértices y cuyo lado menor sea la mitad del mayor”, es relativamente muy sencilla, lo cual no significa que algunos escolares puedan tener dificultades por diversas razones, pero desde este primer momento se pudiera estar proyectando una solución más racional o novedosa en un determinado grupo escolar, por ejemplo, construir el triángulo con las exigencias planteadas, inscrito, además, en un hexágono regular, lo cual posibilita otras observaciones.

La siguiente figura muestra una posible construcción: el cuadrado ABCD, el punto medio del lado CD y el punto medio de AC que permitieron construir la circunferencia; un punto G sobre la circunferencia y un hexágono regular; además, la bisectriz del ángulo rectángulo sobre la cual se encuentra el centro de la circunferencia buscada. Aprovechando propiedades del hexágono, puede justificarse que el centro de la circunferencia buscada también se encuentra sobre la mediatriz de dos de sus lados, como se observa en la figura 12 y que junto a la bisectriz señalada queda determinado el centro de la circunferencia buscada.

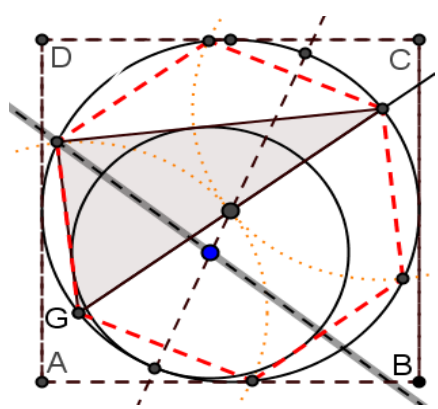

Figura 12. Aprovechando propiedades del hexágono.

La vía antes expuesta puede combinarse con otras, que incluyan construcciones auxiliares de prolongación de lados, trazado de tangentes a la circunferencia y movimientos, aspectos aprovechables para sistematizar conocimientos y procedimientos, hacer comprobaciones de hipótesis y reflexionar sobre distintas vías de solución.

CONCLUSIONES.

Los ejercicios geométricos y variantes de estos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra, así como las observaciones didácticas expuestas contribuyen a revelar y solucionar problemas identificados en la enseñanza – aprendizaje de la geometría en el nivel medio y primer año de carreras universitarias. También promueven nuevos análisis en cuanto a variantes de ejercicios, vías de solución y tratamiento didáctico favorecedor de la atención diferenciada a los escolares y la estimulación de su creatividad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9*(2), 53-83.
2. Hernández H, C. M. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, 115-129. Recuperado de: www.sinewton.org/numeros
3. Hernández H, C. M. (2015). Actividad investigativa escolar y ejercicios en matemáticas: El papalote. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *42*, 95-113. Recuperado de: http://www.fisem.org/

DATOS DEL AUTOR:

1. Carlos Manuel Hernández Hechavarría. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Máster en Ciencias de la Educación y Licenciado en Matemática. Profesor Titular. Labora como profesor de pregrado y postgrado en la Universidad de Oriente. Es miembro del Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran". Correo electrónico: carlosmhh@uo.edu.cu

RECIBIDO: 09 de febrero del 2017. **APROBADO:** 26 de febrero del 2017.