Asesorías y Tutorías para la Investigación Científica en la Educación Puig-Salabarría S.C.
José María Pino Suárez 400-2 esq a Lerdo de Tejada. Toluca, Estado de México. 722389847
RFC: ATI120618V12

Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores.
http://www.dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/
ISSN: 2007 – 7890.

Año: V Número: 2 Artículo no.14 Período: Octubre, 2017 – Enero 2018.

TÍTULO: Problemas a partir de un problema de Olimpiada Internacional de Matemática. Propósitos y consideraciones didácticas.

AUTOR:

1. Dr. Carlos Manuel Hernández Hechavarría.

RESUMEN: Aunque la importancia de los problemas y su tratamiento didáctico en la enseñanza - aprendizaje de la Matemática es totalmente reconocida por la comunidad científica, persisten dificultades asociadas a la necesidad de modificar ejercicios y problemas considerando creencias, necesidades y potencialidades de los escolares. En este sentido, se revelan dificultades y muestran alternativas de solución con distintos propósitos. Se exponen variantes de problemas y consideraciones didácticas a partir de un problema de geometría de la Olimpiada Internacional de Matemática celebrada en 1978, las transformaciones del problema se realizan en cuanto a contenidos básicos y niveles de exigencias, aspecto de medular importancia en la diferenciación de la enseñanza - aprendizaje, que puede servir de modelo para una mejor preparación de los docentes.

PALABRAS CLAVES: Problemas, Didáctica, Geometría, GeoGebra, Matemática.

TITLE: Problems from an International Math Olympiad problem. Purposes and didactic considerations.

AUTHOR:

1. Dr. Carlos Manuel Hernández Hechavarría.

ABSTRACT: Although the importance of the problems and their didactic treatment in the teaching - learning of Mathematics is totally recognized by the scientific community, there are still difficulties associated with the need to modify exercises and problems considering the beliefs, needs and potential of the students. In this sense, difficulties are revealed and alternative solutions are presented for different purposes. Variants of problems and didactic considerations are presented on the basis of a geometry problem of the International Mathematical Olympiad held in 1978, the transformations of the problem are carried out in terms of basic contents and levels of exigencies, aspect of central importance in the differentiation of the teaching - learning, which can serve as a model for a better preparation of teachers.

KEY WORDS: Problems, Didactics, Geometry, GeoGebra, Mathematics.

INTRODUCCIÓN.

La importancia de los problemas y su tratamiento didáctico en la enseñanza aprendizaje de la Matemática es totalmente reconocida por la comunidad científica; sin embargo, en la práctica escolar se evidencian múltiples dificultades en el planteamiento y resolución de problemas, resultando notoria la falta de profundidad en el análisis didáctico y propuestas que se adecuen a las particularidades de los escolares; tales dificultades están asociadas a distintos factores, entre ellos, la preparación matemática y didáctica de docentes para seleccionar, fraccionar y/o transformar ejercicios y problemas, de manera que respondan a las creencias, necesidades y potencialidades de los escolares.

Dificultades diagnosticadas en docentes para la transformación de ejercicios y problemas.

Se han encontrado dificultades como que:

- ✓ no consideran necesario transformar ejercicios, optan por tomar ejercicios similares o con pocas diferencias de textos disponibles, porque les resulta más fácil.
- ✓ no disponen de preparación didáctica y habilidades suficientes para realizar transformaciones convenientes de los ejercicios y problemas, atendiendo a las particularidades de los escolares.
- ✓ no realizan un adecuado diagnóstico de las creencias, necesidades y potencialidades de los escolares por falta de preparación o interés en realizar una adecuada diferenciación didáctica a partir de ejercicios y problemas.
- ✓ no utilizan un software apropiado, como el GeoGebra u otro, para realizar trasformaciones de ejercicios y problemas de manera oportuna.

Las dificultades antes mencionadas ilustran diferentes situaciones, criterios y dificultades asociadas a la preparación matemática de los docentes. La tercera apunta a la preparación para el diagnóstico y el interés en realizar una adecuada diferenciación didáctica; aspectos que son básicos para emprender adecuadas transformaciones de los ejercicios y problemas teniendo como centro de atención las particularidades de los escolares; es decir, prestarle especial atención a la relación ejercicios-particularidades de los escolares para el planteamiento de problemas apropiados con una mejor estructuración interna de los contenidos matemáticos en correspondencia con la preparación previa, necesidades y potencialidades de los escolares.

Con respecto a la cuarta existen causas tales como la no disponibilidad de medios informáticos y el software apropiado, insuficientes conocimientos y habilidades para el manejo del software;

aspectos que pueden conjugarse negativamente con otras de las dificultades anteriores, sobre todo, para utilizarlo de manera oportuna en determinadas situaciones con escasa disponibilidad de tiempo para reflexionar, exponer e intercambiar ideas y procedimientos con los escolares.

El GeoGebra es un Software libre y gratuito de matemática dinámica en constante desarrollo que posibilita realizar novedosas trasformaciones de ejercicios y problemas, ampliamente reconocido por investigadores y docentes de distintos países; no obstante, existe desconocimiento del mismo en determinadas regiones y la necesidad de superar a docentes en su uso. Como muestra de publicación que refleja estas afirmaciones está el artículo "GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas" (Jiménez y Jiménez, 2017).

Entre las dificultades mencionadas pueden aflorar diversas relaciones de dependencia e independencia, por ejemplo, es posible que un docente reconozca la conveniencia y posibilidad de utilización del GeoGebra para abordar ejercicios relativamente exigentes pero no disponga de la preparación matemática o didáctica, suficiente para ello; en este caso, la no utilización del software tiene una causa específica no relacionada con el reconocimiento de su importancia.

Con vista a esclarecer y contribuir a solucionar algunas de las dificultades señaladas anteriormente se exponen elementos y consideraciones didácticas a partir de diversos ejercicios que han constituido problemas interesantes para escolares de la enseñanza media, de carreras pedagógicas, y de cursos impartidos a docentes por el autor; estos ejemplifican, de manera explícita o implícita, el mencionado fraccionamiento y transformación de ejercicios y problemas a partir de un problema de la Olimpiada Internacional de Matemática de 1978.

En el artículo "Ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra: ejemplos y observaciones didácticas" (Hernández, 2017) aparecen otros ejercicios estrechamente vinculados a los presentados en este, los que se complementan en cuanto a distintas exigencias, procedimientos matemáticos y didácticos, permitiendo ampliar la variedad de detalles en ejercicios con asistencia del GeoGebra. En General dejan ver ventajas de la matemática dinámica y su connotación en una nueva dinámica del proceso enseñanza-aprendizaje con asistencia de un software apropiado.

Cabe destacar, que los ejercicios y problemas, derivados del referido problema de Olimpiada y las consideraciones didácticas están vinculados a experiencias del autor en las enseñanzas media y superior, particularmente en la formación y superación de docentes. Como entrenador de concursantes de matemática durante varios años notó, que cuando les proponía problemas de olimpiadas internacionales a escolares de décimo grado, que se iniciaban como concursantes informándole la fuente, no se esforzaban lo suficiente, creyendo que no podrían por las exigencias de ese nivel y la falta de conocimientos. Teniendo en cuenta dichos criterios fue seleccionado este problema, que aunque es de nivel internacional, para su resolución solo se requieren conocimientos básicos de geometría del currículo escolar de la enseñanza media, además dominados plenamente por los escolares a quienes se les propondría.

En el caso de los concursantes se notó, que cuando no se informaba la fuente, la mayoría realizaba un mayor esfuerzo, al contrario, cuando se informaba, la minoría lo consideraba un reto estimulante y disfrutaba los avances aunque no llegara a la solución. Teniendo en cuenta la complejidad de este problema para escolares no concursantes e intencionalidades didácticas, fundamentalmente para escolares que se forman como docentes, fue transformado o dividido en distintos problemas más simples con asistencia del GeoGebra.

Los problemas y consideraciones didácticas que se presentan han sido utilizados convenientemente en la enseñanza media y superior, particularmente en la formación y superación de docentes.

DESARROLLO.

El planteamiento y resolución de problemas es esencial en el proceso enseñanza – aprendizaje de la matemática, y en esta dirección regularmente resulta necesario o conveniente una adecuada selección y/o transformación de los mismos en mayor o menor medida, en dependencia de las necesidades y potencialidades de los escolares; de aquí que los problemas transformados puedan distanciarse en diferente medida de los originales pero con elementos esenciales que los vinculen notoriamente.

Las transformaciones pueden tener distintos propósitos y conducir al aumento o disminución de exigencias en sentido general, pero no de manera absoluta puede resultar que las exigencias disminuyan, aumenten o que aumenten y disminuyan en un mismo ejercicio respecto a determinados aspectos.

Existen múltiples alternativas didácticas para tales cambios de exigencias, por ejemplo, para simplificarlas: fragmentar el problema en varios más sencillos que involucren parte de los datos y exigencias procedimentales, añadir datos o sugerencias y dando la posibilidad de utilizar algún software dinámico. Las exigencias pueden aumentarse condicionando las vías de solución y aumentando la generalidad de las exigencias, entre otras. Las exigencias pueden aumentarse y disminuirse en un mismo ejercicio combinando coherentemente las alternativas anteriores, aspecto que podrá apreciarse al analizar los problemas que se presentarán.

Variantes de problemas y consideraciones didácticas a partir de un problema exigente, como el referido de la Olimpiada Internacional de Matemática celebrada en 1978, que ilustren transformaciones en cuanto a contenidos básicos y niveles de exigencias, es una demanda actual en la formación de docentes, pues se han diagnosticado dificultades en su realización, entre otras, la falta de modelos de transformaciones de ejercicios con vistas a la atención a las particularidades de los escolares y de la diferenciación de la enseñanza – aprendizaje en general.

Considerando que el problema seleccionado es relativamente muy exigente para la mayoría de los escolares de la enseñanza media superior y de los que ingresan a la universidad para formarse como docentes, es necesario una alta preparación de los docentes para simplificarlo en algunos aspectos e incorporarle nuevas exigencias acorde a objetivos específicos de los programas de estudio, el aprovechando un software apropiado y el enfoque investigativo.

Aunque el idioma en que se encuentran los ejercicios y problemas no es un aspecto cardinal en este artículo, cabe destacar que generalmente pueden encontrarse en distintas fuentes e idiomas; aspecto que pudiera aprovecharse para estimular el aprendizaje de otros idiomas, el reconocimiento y utilización de fuentes importantes disponibles, por ejemplo, el problema escogido de la XX Olimpiada Internacional aparece en el libro International Mathematical Olimpiads 1979-1985 (Klamkim, 1986) de la siguiente mantera: In triangle ABC, AB=AC. A circle is tangent internally to the circumcircle of triangle ABC and also to sides AB, AC at P, Q, respectively. Prove that the midpoint of segment PQ is the center of the incircle of trinangle ABC.

Buena parte de los problemas transformados que se presentan tienen múltiples diferencias con relación al original en cuanto a datos, exigencias, formas de presentación y medios para resolverlos, especialmente mediante el GeoGebra; de manera implícita, dejan ver el importante papel del docente en el diagnóstico del aprendizaje de los escolares y la necesidad de seleccionar y/o modificar problemas acorde a los resultados del mismo, pues generalmente no aparecen los más apropiados en los textos básicos y complementarios que existen en los centros escolares.

Posibles clasificaciones para las transformaciones de ejercicios y problemas.

El estudio de los problemas presentados puede promover interesantes comparaciones y la creatividad de docentes en función de una adecuada diferenciación de la enseñanza, a realizar nuevas transformaciones atendiendo a las particularidades de sus escolares y reflexionar sobre posibles clasificaciones para dichas transformaciones, por ejemplo clasificarlos atendiendo a los datos:

- ✓ Según su ajuste a los datos del problema: los contempla todos, a una parte de ellos, incorpora datos adicionales que lo particularizan, combina parte de los dados con datos adicionales que no guardan estrecha relación con los primeros.
- ✓ Según la forma de presentación de los datos: no contempla representación gráfica, incluye representación gráfica con mayor o menor calidad (atendiendo a elementos, tamaño, colores, líneas continuas y discontinuas, etc.), en formato digital con posibilidades dinámicas o no.

Atendiendo a las exigencias, pueden ser, en sentido general: mayores, iguales o menores a las planteadas en el problema según:

- ✓ Del tiempo disponible para realizarlo.
- ✓ De los medios disponibles o exigidos para resolverlos.
- ✓ De los conocimientos y habilidades previas de los escolares.
- ✓ De la cantidad y profundidad de las transformaciones u operaciones a realizar.
- ✓ De la posibilidad o no de trabajar en equipos.
- ✓ De la ayuda que pudieran recibir.
- ✓ De las fuentes que puedan consultar.
- ✓ Del sistema de calificación u otras razones que pueden incidir en la estimulación, el resultado o desempeño de los escolares.

Los criterios antes expuestos no agotan los aspectos y posibles clasificaciones, solo ilustran la posibilidad de su realización; pudieran plantearse otras clasificaciones que ponderen determinados aspectos, por ejemplo, que pongan en primer plano los medios o recursos informáticos dada las alternativas y ventajas dinámicas que ofrecen.

Problemas y consideraciones didácticas.

A continuación se presentan diez problemas, que aunque no responde a una clasificación específica, muestran distintos grados de transformaciones acorde a los datos y exigencias, también algunas ideas o alternativas de solución y consideraciones didácticas con vistas a su utilización de manera flexible en la práctica escolar según el diagnóstico de los escolares y los recursos disponibles; en algunos casos no se detallan o fundamentan aspectos de la solución considerando que no les resultará difícil a los docentes o que les pudiera resultar beneficioso para promover o ampliar su formación docente.

Si bien los problemas y consideraciones didácticas pueden considerarse ejemplos suficientes para justificar necesidades, posibilidades e importancia de transformar problemas cubren todas las variantes y necesidades de la enseñanza-aprendizaje, por tanto, pueden aprovecharse en cursos de pregrado y postgrado de formación de docentes, conjugando elementos académicos, laborales e investigativos con vista a profundizar en aspectos tales como: el enfoque investigativo en la enseñanza-aprendizaje, la fijación y sistematización de contenidos matemáticos y didácticos, el desarrollo de criterios de clasificación, transformación, ordenamiento y utilización de ejercicios atendiendo a particularidades del nivel, centro, grado y escolares que van dirigidos.

Problema 1. Construya con el GeoGebra un triángulo ABC, AB=AC y la circunferencia circunscrita a este; posteriormente la circunferencia que es tangente interiormente a la circunferencia circunscrita en M y a los lados iguales del triángulo en P y Q respectivamente, de manera que su centro (Z) pueda moverse sobre la mediatriz de BC sin afectar los datos anteriores. Luego determine el punto medio de PQ e identifíquelo por I.

Una posible representación, figura 1, se obtiene con el siguiente procedimiento.

- ✓ Construir una circunferencia con centro en O y un radio cualquiera R.

- ✓ Situar un punto A cualquiera en la circunferencia, trazar la recta que pasa por este y el centro O, y luego determinar la intersección M (distinto del punto A) entre la recta y la circunferencia.
- ✓ Situar un punto “Z” en el segmento AM y trazar la circunferencia con centro en este y que pasa por “M”.
- ✓ Trazar desde el punto A, las tangentes a la circunferencia que tiene centro en “Z” y denotar los puntos de tangencia con las letras “P” y “Q”; las intersecciones de estas con la circunferencia de mayor radio con “B” y “C” y, el punto medio de PQ por “I”.

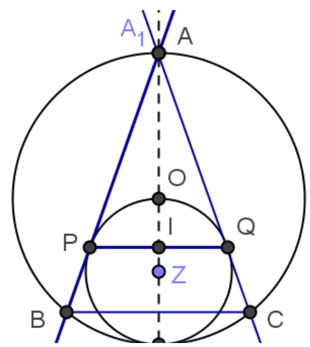

Figura 1. Con el procedimiento.

Nótese que en este problema se omite el dato que permite identificar al punto medio de PQ como incentro del triángulo ABC y tiene exigencias en cuanto al orden de la construcción que inciden en que los escolares no partan de la construcción de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC para determinar a P y Q, y posteriormente, conjuntamente con estos y el punto medio del arco BC trazar la circunferencia tangente interiormente a la mayor, tratando de que su centro (Z) cumpla la exigencia de movilidad.

Lo anterior hace que el problema sea algo más exigente para algunos escolares al excluir una de las vías que pudieran utilizar para la representación de la figura, y por tanto, favorece el desarrollo de su flexibilidad y creatividad; sin embargo, para otros pudiera facilitarles la solución al evitar algunos errores asociados a la determinación de Z (centro de la circunferencia tangente interiormente a la circunscrita) y el mantenimiento de las propiedades de la figura al moverlo.

De esta manera se deja ver que la variación de exigencias pudiera tener distintos efectos en la complejidad del problema, dependiendo de las particularidades de los escolares, de sus conocimientos, habilidades, y en especial, de su flexibilidad para no aferrarse a ideas iniciales o determinados procedimientos.

En el protocolo de construcción con el GeoGebra de la tabla 1 pueden observarse detalles de una construcción específica que cumple las exigencias planteadas. La elección de coordenadas enteras para puntos notables de la construcción, y sus posiciones facilitan la realización de distintas reflexiones matemáticas, y la elaboración y resolución de nuevos problemas por docentes y escolares. El desplazamiento de Z permitirá realizar actividades investigativas para esclarecer condiciones respecto a su ubicación necesaria entre O y M para que la circunferencia con centro en él tangente interiormente a la otra.

Tabla 1. Protocolo de una construcción específica.

nº	Nombre	Definición	Álgebra
1	Punto O	Punto de intersección de EjeX, EjeY	O = (0, 0)
2	Circunferencia c	Circunferencia con centro O y radio 3	c: $x^2 + y^2 = 9$
3	Punto A_1	Punto en c	$A_1 = (0, 3)$
4	Recta a	Recta que pasa por O, A_1	a: x = 0
5	Punto Z	Punto en a	Z = (0, -1.5)
6	Punto A	Punto de intersección de c, a	A = (0, 3)
6	Punto M	Punto de intersección de c, a	M = (0, -3)
7	Circunferencia d	Circunferencia que pasa por M con centro Z	d: $x^2 + (y + 1.5)^2 = 2.25$
8	Recta b	Tangente a d pasando por A_1	b: 4x - 1.41y = -4.24
8	Recta e	Tangente a d pasando por A_1	e: 4x + 1.41y = 4.24
9	Punto B_1	Punto de intersección de c, b	$B_1 = (0, 3)$
9	Punto B	Punto de intersección de c, b	B = (-1.89, -2.33)
10	Punto C_1	Punto de intersección de c, e	$C_1 = (0, 3)$
10	Punto C	Punto de intersección de c, e	C = (1.89, -2.33)
11	Punto P	Punto de intersección de d, b	P = (-1.41, -1)
12	Punto Q	Punto de intersección de d, e	Q = (1.41, -1)
13	Segmento f	Segmento [B, C]	f = 3.77
14	Segmento g	Segmento [P, Q]	g = 2.83
15	Punto I	Punto Medio de P, Q	I = (0, -1)

Problema 2. Añadiéndole la siguiente condición al Problema 1: Si la longitud del radio de la circunferencia tangente interiormente (r) es la mitad de la longitud del radio de la circunscrita al triángulo (R) ¿Cuál es la distancia entre los centros de estas circunferencias?

Es relativamente fácil darse cuenta que para responder a esta interrogante no es necesario realizar el problema anterior, con una simple figura de análisis con lápiz y papel basta para darse cuenta que la distancia entre los centros de estas circunferencias es ½R=r. No se requiere de la utilización del GeoGebra ni de una construcción exacta por ninguna vía, lo cual no niega la posibilidad de usar este software como vía de apoyo para la búsqueda de la solución por los escolares con menor preparación pero con un adecuado dominio del GeoGebra.

Como ejemplo particular de solución puede aprovecharse el protocolo de construcción presentado en la tabla 1 dejando ver en su gráfica correspondiente, figura 2, los centros de las circunferencias determinados O=(0,0) y Z=(0,-1.5), el sistema de coordenadas, las longitudes de los radios y las cuadrículas también; detalles que pueden facilitar el cálculo, el razonamiento y la generación de otros problemas con ideas similares a este por los docentes o los propios escolares, que tributan a la fijación de procedimientos y el desarrollo de habilidades, pero es preciso percatarse de que la transformación sea apropiada a las particularidades de los escolares, que no conduzcan innecesariamente a la reproducción de procedimientos. Para destacar este aspecto se propone el siguiente problema.

Problema 3. Añadiéndole una condición al Problema 1, muy similar a la presentada en el problema 2: "Si la longitud del radio de la circunferencia interior (r) es 1 y la longitud del radio de la circunscrita al triángulo (R) es 3 ¿Cuál es la distancia entre los centros de estas circunferencias? Nótese que no existen diferencias procedimentales para la solución de este problema y el anterior. La solución resulta muy sencilla a partir de una figura de análisis, mucho más si se cuenta con la construcción presentada en el problema anterior (2), basta deslizar "Z" hasta (0;-2) para reconocer, en la figura 3, que la respuesta es 2 y justificarla. Este problema y las acciones desarrolladas con el apoyo del GeoGebra promueven la realización de generalizaciones sencillas como la que aparece en el siguiente problema (4).

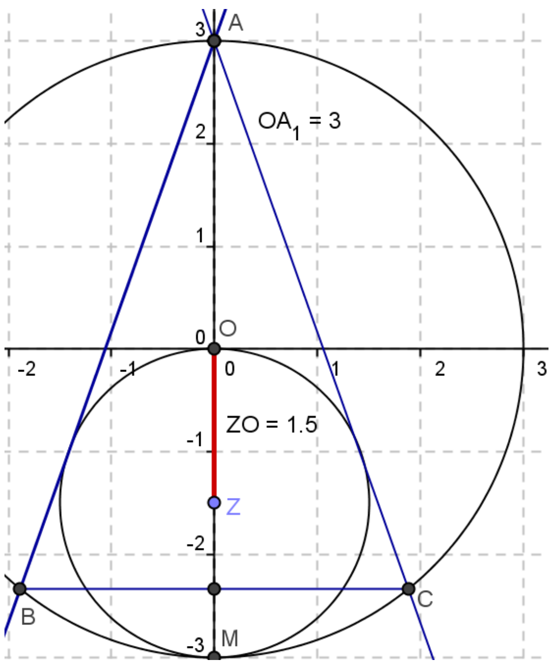

Figura 2. Del protocolo de la tabla 1

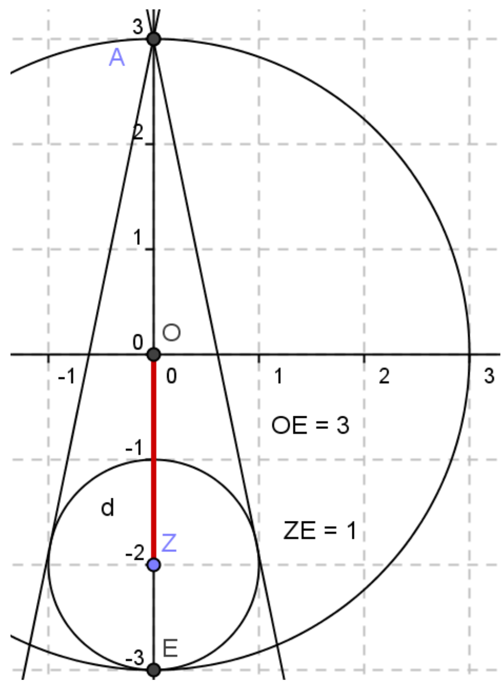

Figura 3. Deslizando a Z

Problema 4. Añadiéndole la siguiente condición al Problema 1: Si la longitud del radio de la circunferencia interior (r) se puede expresar mediante la longitud del radio de la circunscrita al triángulo (R) como r=R/n. ¿Cómo pudiera determinarse la distancia entre los centros de estas circunferencias en función de R y n? Elabora con el GeoGebra una figura de análisis que permita variar los radios de las circunferencias y comprobar la fórmula encontrada para el cálculo de la distancia entre los centros en función de R y n.

La resolución de este problema resulta más sencillo si se resuelven los anteriores, pero esta no es una condición necesaria para resolverlo y en muchos casos no conveniente para una mejor estimulación de los escolares. Aunque la utilización del GeoGebra está orientada a la comprobación, también puede servir para la búsqueda de la solución, sobre todo por la dinámica exigida respecto a los centros de las circunferencias.

Mediante reflexiones relativamente sencillas, los escolares pueden reconocer que la distancia entre los centros de estas circunferencias puede expresarse algebraicamente como R-R/n=R(1-1/n)=R(n-1)/n, teniendo en cuenta que es la longitud de radio de la circunferencia mayor menos la longitud del radio de la menor. Las figuras 2 y 3 correspondientes a la solución de los problemas 2 y 3 cumplen las exigencias planteadas en éste por ser casos particulares, por tanto, pueden utilizarse para comprobar el cumplimiento de la fórmula encontrada para diferentes valores de R y n; aspecto que puede notarse fácilmente en el protocolo de construcción de la figura 3, que se muestra en la tabla 2. Para facilitar la observación se destaca el segmento OZ, determinado por los centros con color rojo.

Tabla 2. Protocolo de construcción de la figura 3 para ilustrar la relación entre R y n.

Nº	Nombre	Definición	Álgebra
1	Punto A	Punto en EjeY	A = (0, 3)
2	Punto O	Punto de intersección de EjeX, EjeY	O = (0, 0)
3	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por A con centro O	c: $x^2 + y^2 = 9$
4	Punto Z	Punto en EjeY	Z = (0, -2)
5	Punto D	Punto de intersección de c, EjeY	D = (0, 3)
5	Punto E	Punto de intersección de c, EjeY	E = (0, -3)
6	Circunferencia d	Circunferencia que pasa por E con centro Z	d: $x^2 + (y + 2)^2 = 1$
7	Recta a	Tangente a d pasando por A	a: 4.8x - 0.98y = -2.94
7	Recta b	Tangente a d pasando por A	b: 4.8x + 0.98y = 2.94
8	Número R	Distancia de O a E	R = 3
9	Texto TextoOE	Nombre[O] + (Nombre[E]) + " \, = \, " + R	TextoOE = "OE \, = \, 3"
10	Número r	Distancia de Z a E	r = 1
11	Texto TextoZE	Nombre[Z] + (Nombre[E]) + " \, = \, " + r	TextoZE = "ZE \, = \, 1"
12	Número OEmenosZE	Distancia[O, E] - Distancia[Z, E]	OEmenosZE = 2
13	Número distOZ	Distancia[O, E] - Distancia[Z, E]	distOZ = 2
14	Número n	R / r	n = 3
15	Número Fórmula	R (n - 1) / n	Fórmula = 2

A continuación se presentan dos problemas de carácter abierto dirigidos a la formulación de problemas; por tanto, dan lugar a múltiples respuestas y el despliegue de la creatividad por escolares y docentes, uno a partir de los datos del problema y otro a partir de una figura que cumple con los datos del problema, aunque los puntos de tangencia de la circunferencia menor con los lados del triángulo no se denotan por P y Q, se añaden y denotan los centros de las circunferencias, además otros detalles visuales que favorecen la identificación de los datos y algunas ideas para la formulación de problemas.

Problema 5. Elabora problemas interesantes a partir de los siguientes datos: Un triángulo isósceles ABC, AB=AC; una circunferencia tangente interiormente a la circunferencia circunscrita al triángulo y tangente a los lados AB, AC, en P, Q respectivamente, y el punto medio del segmento PQ (incentro del triángulo).

Problema 6. Describe la siguiente figura (4) y formula, a partir de esta, problemas interesantes lo más originales posible.

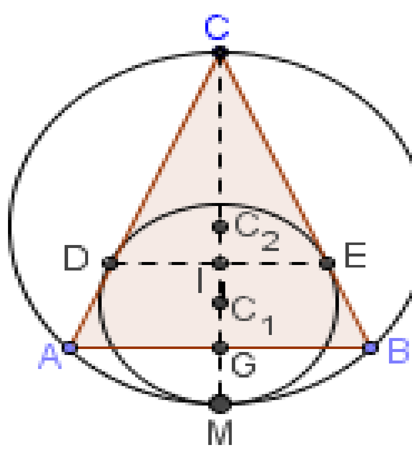

Figura 4. Circunferencia, triángulos y puntos.

Aunque estos ejercicios son de carácter abierto y están íntimamente relacionados, muestran diferencias evidentes que repercuten en las soluciones de los escolares. En el primero se dan los datos sin figura, y en el segundo, la figura constituye el dato.

El estudio de las respuestas de los escolares a estos problemas y su relación con la interrogante del problema de olimpiada internacional de referencia es interesante, y aunque no es propósito abordarlo en este artículo, cabe adelantar que en estudios preliminares con escolares de nivel medio, docentes en formación, y de primer año de carreras universitarias, las interrogantes planteadas distan bastante del referido problema. Las respuestas dadas por escolares de distintos grupos escolares difieren claramente, y algunos escolares tienen la tendencia a formular exclusivamente problemas sobre áreas.

Aunque la descripción de la figura 4 es sencilla, no es de esperar que los escolares describan la figura y formulen problemas muy similares a los del problema de olimpiada de referencia, pues aunque responde a los datos del problema, existen múltiples opciones, y por tanto, la probabilidad de coincidencia es pequeña; no obstante, por los detalles de la figura representada, es posible que realicen descripciones bastante aproximadas de algunos aspectos, por ejemplo, "En la figura se representa un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia con centro C2 y una circunferencia con centro C1 que es tangente a la anterior y a los lados iguales del triángulo en D y E…".

Aunque las predicciones de los docentes respecto a las formulaciones de problemas por los escolares sea baja, no niega que puedan pronosticar respuestas interesantes en correspondencia con las particularidades de los escolares, tampoco que puedan inducir algunas por determinada razón; por tanto, resulta favorable una preparación matemática y didáctica de los docentes con asistencia del GeoGebra u otro software de matemática dinámica con dicho fin. En este sentido, los docentes deben prepararse para realizar figuras convenientes, si es necesario con carácter dinámico, para promover actividades indagativas con diferentes propósitos, por ejemplo, para identificar propiedades, plantear hipótesis y demostrarlas, exponer consideraciones didácticas y atender posibles errores de los escolares.

Problema 7. Construye, con el GeoGebra, dos tangentes a una circunferencia que tengan entre sí un ángulo de 60^0 y que permita mover uno de los puntos de tangencia con la circunferencia, manteniendo el radio de la circunferencia y el ángulo entre las tangentes. Partiendo de esta construcción, el triángulo equilátero tiene dos lados sobre estas tangentes y tres puntos de tangencia con la circunferencia, la circunferencia circunscrita al triángulo y la circunferencia que es tangente a la circunferencia circunscrita y las tangentes iniciales. Plantea hipótesis respecto al incentro del triángulo.

Este problema se distingue por varias exigencias que particularizan la construcción y el orden constructivo con respecto a las fases o pasos y la movilidad de uno de sus puntos sin afectar propiedades dadas de la figura, es decir, posibilita una dinámica restringida que pudiera resultar conveniente por razones didácticas en determinado grupo escolar.

Una alternativa posible puede surgir de una idea básica al trazar un punto en una circunferencia cualquiera, la tangente que pasa por este y un ángulo central que permita la construcción de la otra tangente de manera que ambas formen un ángulo de 60°, en este caso, los puntos de tangencia determinan un ángulo central de 60°. Un posible protocolo de construcción se muestra en la tabla 3 y su resultado en la figura 5. El planteamiento de hipótesis respecto al incentro del triángulo está dirigido a promover el redescubrimiento de la exigencia que se pide demostrar en el referido problema de olimpiada y otras posibles.

Tabla 3. Protocolo de construcción de la figura 5.

Nº	Nombre	Definición	Álgebra
1	Punto O	Punto de intersección de EjeX, EjeY	O = (0, 0)
2	Circunferencia c	Circunferencia con centro O y radio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Punto B_1	Punto en c	B_1 = (0.86, 0.5)
4	Recta a	Tangente a c pasando por B_1	a: 0.86x + 0.5y = 1
5	Segmento b	Segmento [O, B_1]	b = 1
6	Punto B'	B_1 rotado por el ángulo 60°	B' = (-0, 1)
7	Ángulo α	Ángulo entre B_1, O, B'	α = 60°
8	Recta d	Recta que pasa por O, B'	d: -1x = 0
9	Punto A	Punto de intersección de d, a	A = (-0.01, 2)
10	Recta a'	a reflejado en d	a': 0.87x - 0.5y = -1
11	Punto D	Punto de intersección de c, a'	D = (-0.87, 0.5)
11	Punto E	Punto de intersección de c, a'	E = (-0.87, 0.5)
12	Segmento e	Segmento [O, E]	e = 1
13	Punto F	Punto de intersección de c, d	F = (-0, 1)
13	Punto G	Punto de intersección de c, d	G = (0, -1)
14	Recta f	Tangente a c pasando por G	f: 0x - 1y = 1
15	Punto B	Punto de intersección de a', f	B = (-1.73, -1)
16	Punto C	Punto de intersección de a, f	C = (1.73, -1)
17	Circunferencia g	Circunferencia que pasa por A, B, C	g: $x^2 + y^2 = 4$
18	Punto H	Punto de intersección de g, d	H = (-0.01, 2)
18	Punto M	Punto de intersección de g, d	M = (0.01, -2)
19	Recta h	Recta que pasa por O paralela a f	h: 0x - 1y = 0
20	Punto P	Punto de intersección de h, a'	P = (-1.15, -0)
21	Punto Q	Punto de intersección de h, a	Q = (1.15, 0)
22	Circunferencia k	Circunferencia que pasa por M, Q, P	k: $(x - 0)^2 + (y + 0.67)^2 = 1.78$

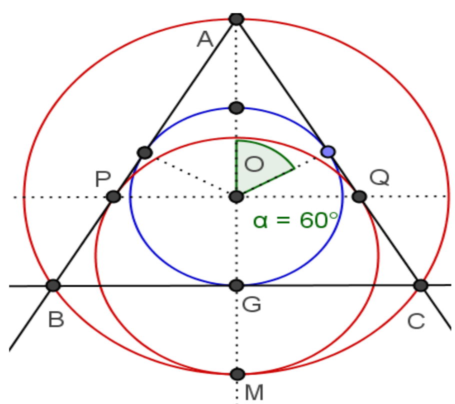

Figura 5. Circunferencia, triángulos y puntos.

Problema 8. Describe cómo construiría con el GeoGebra la figura correspondiente al problema de olimpiada internacional de referencia. Para esta construcción puedes considerar que el incentro del triángulo es el punto medio de PQ.

Este problema solo pide describir cómo realizar la construcción de la figura con el GeoGebra y considerando como cierta la exigencia que se pide probar, es decir, es una simplificación notoria del problema en un sentido, pero impone una nueva exigencia que exige un esfuerzo mayor si el escolar no tiene la posibilidad de hacer exploraciones con el software, no tiene un amplio dominio de este o no puede memorizar algunas posibilidades que ofrece; es decir, aunque el problema se simplifica al dar la opción de tomar como dato la afirmación que se pide demostrar, se puede complejizar por otros aspectos. Una descripción posible es la siguiente:

- ✓ Trazar la una circunferencia dados su centro “O” y uno de sus puntos “A”, la semirrecta AO y situar un punto “W” en ella e interior a la circunferencia, luego trazar la perpendicular a esta semirrecta que pasa por “W” para determinar los vértices “B” y “C” del triángulo, luego el triángulo ABC y la circunferencia circunscrita a este.
- ✓ Para trazar la circunferencia inscrita en el triángulo basta determinar el incentro “D”, mediante la intersección de la bisectriz del ángulo ABC con la semirrecta AO (que también es bisectriz), y luego trazar la circunferencia con centro en este y tomando a W como uno de sus puntos.
- ✓ Para determinar a “P” y “Q” se puede trazar la recta que pasa por el incentro “D” perpendicular a AW, serán las intersecciones de esta con los lados AB y AC respectivamente. La intersección “H” de la semirrecta AO con la circunferencia circunscrita al triángulo será el punto de tangencia de la circunferencia circunscrita con la que es tangente a los lados iguales del triángulo en “P” y “Q”. Por último trazar la circunferencia que pasa por P, Q y H.

Nótese que los puntos A y O pueden moverse a cualquier punto del plano y W puede moverse sobre la semirrecta AO sin afectar las exigencias del problema; por lo tanto, permite realizar diversas indagaciones u observaciones. Aunque el problema no exige la representación gráfica, puede ser orientada en otro momento con vista a que los alumnos comprueben su propuesta o que les sirva de ayuda si no pudieron dar una respuesta acertada o racional, también puede ser utilizado por los docentes para esclarecer dudas de los escolares. En la figura 6 se muestran una representación de la construcción descrita.

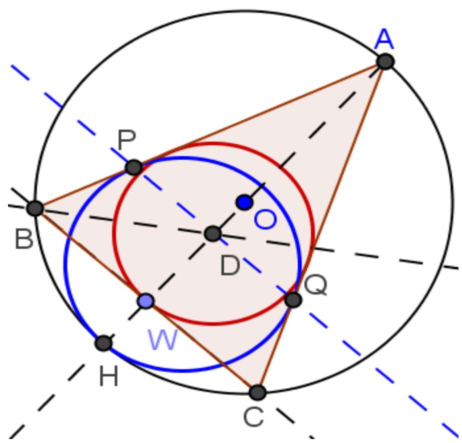

Figura 6. Correspondiente al problema 8.

Problema 9. En un triángulo isósceles ABC de base BC, la altura relativa a la base y la base tienen una longitud de 6 unidades. Determine la distancia entre los centros de las circunferencias circunscrita e inscrita por dos vías distintas.

Este problema no tiene exigencias en cuanto al orden en que se realizan las acciones constructivas y la utilización de algún software, pero sí en cuanto a la cantidad de vías; por tanto, los escolares pueden escoger las que le resulten más fáciles o interesantes y a los docentes les corresponderá sacarle el mayor provecho a la diversidad de vías y promover reflexiones sobre ellas y la creatividad en general. Con vista a promover reflexiones didácticas se exponen dos vías de solución. Con el GeoGebra resulta notablemente fácil como se muestra en el protocolo de construcción de la tabla 4 y figura 7

Tabla 4. Protocolo de construcción correspondiente al problema 9.

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto sobre EjeY	A = (0, 6)
2	Punto B	Punto sobre EjeX	B = (-3, 0)
3	Punto C	Punto sobre EjeX	C = (3, 0)
4	Triángulo polígono1	Polígono A, B, C	polígono1 = 18
4	Segmento c	Segmento [A, B] de Triángulo polígono1	c = 6.71
4	Segmento a	Segmento [B, C] de Triángulo polígono1	a = 6
4	Segmento b	Segmento [C, A] de Triángulo polígono1	b = 6.71
5	Recta d	Mediatriz de c	d: 3x + 6y = 13.5
6	Punto D	Punto de intersección de d, EjeY	D = (0, 2.25)
7	Circunferencia e	Circunferencia que pasa por B con centro D	e: $x^2 + (y - 2.25)^2 = 14.06$
8	Recta f	Bisectriz de a, c	f: 0.85x + 0.53y = -2.55
8	Recta g	Bisectriz de a, c	g: -0.53x + 0.85y = 1.58
9	Punto E	Punto de intersección de g, EjeY	E = (0, 1.85)
10	Número distanciaED	Distancia de E a D	distanciaED = 0.4
12	Texto TextoED	Nombre[E] + (Nombre[D]) + " = " + distanciaED	ED = 0.4

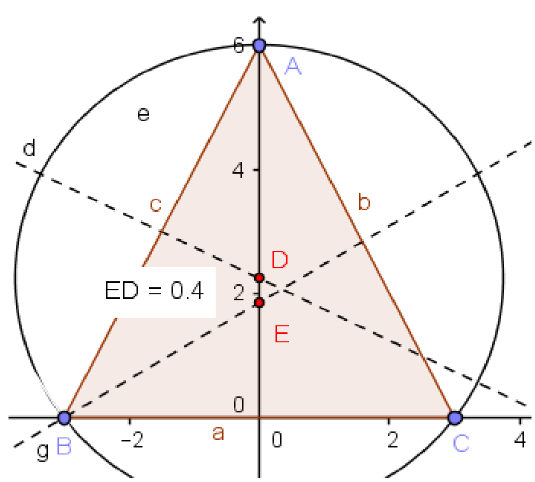

Figura 7. Correspondiente al problema 9.

Un detalle interesante que puede verse en el protocolo de construcción y figura es la selección conveniente de los vértices del triángulo, los cuales se pueden fijar como objeto para no incurrir en movimientos indeseados de estos, y si resulta necesario, con otro propósito didáctico se dejan libres. Es importante destacar que la selección de los vértices o figura particular no le quita generalidad a la vía de solución, igualmente la posibilidad de otras vías sin la utilización de algún software o combinación de vías, entre ellas algebraicas y geométricas; también conviene reflexionar sobre la racionalidad de las vías y la connotación de los contenidos matemáticos que involucra. Con vista a promover la reflexión en estos aspectos, se presenta la siguiente vía:

Una vía tradicional más trabajosa, sin la utilización del GeoGebra, que pudieran generar los escolares, consiste en: trazar un triángulo de análisis, Figura 8, con vértices en A = (0, 6), B = (-3, 0) y C = (3, 0) y considerar a D como su circuncentro, E punto medio de AB y F punto medio de BC, reconocer la semejanza entre los triángulos AED y ABF y plantear la razón entre sus lados homólogos $\frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BF} = \frac{AE}{AF}$ para determinar las coordenadas de D, lo que implicaría varios cálculos para obtener $AB = 3\sqrt{5}$ y $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ y hacer las sustituciones correspondientes, de las cuales se obtiene AD=3,75 y de aquí DF=2,25 que es la coordenada de D (0;2,25), pues F (0;0).

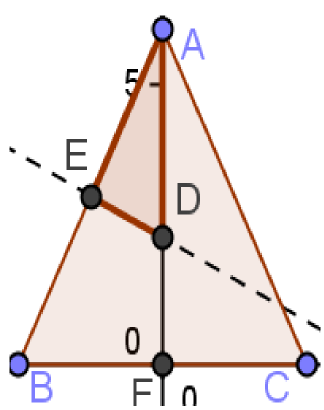

Figura 8. Triángulo de análisis.

Para determinar el incentro, sin el GeoGebra, existen distintas alternativas que requieren ciertos conocimientos previos, habilidades y operaciones, más tiempo, en general más trabajosas, por ejemplo, primeramente obtener la bisectriz del ángulo ABC, determinando dos puntos equidistantes de B, uno sobre BA y otro sobre BC; la recta que pasa por el punto medio de estos y B es la bisectriz y su intersección con AF será el incentro.

Aprovechando las coordenadas conocidas de los vértices del triángulo, puede tomarse a F, que está a 3u de B, como uno de los puntos equidistantes de B, pero es necesario determinar las coordenadas del otro sobre BA y que denotamos por H, que también está a 3u de B, puede determinarse mediante la solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$(x + 3)^2 + y^2 = 3^2$ (circunferencia con centro en (-3;0) y radio 3).

$y = 2x + 6$ (ecuación de la recta determinada por A y B).

Resolviendo este sistema, se obtienen las coordenadas de H ($-3+3\sqrt{5}/5$; $6\sqrt{5}/5$). Como se aprecia, el procedimiento es más extenso y las coordenadas de H contemplan valores exactos con radicales, al igual que las coordenadas del punto medio de HF y del incentro, cuya determinación no resulta difícil, pero mucho más trabajosa que con el apoyo del GeoGebra.

Con este software, también pueden comprobase, en algunos casos, valores aproximados, los cálculos efectuados manualmente, además visualizarlos geométricamente si es necesario, por ejemplo, en la Figura 9 se destacan las coordenadas de H(x,y) trazando líneas discontinuas desde el hasta los ejes coordenados, x=-1,65835…=-1,66 y=2,683281…=2,68, también el trazado de la bisectriz del ángulo FBH o mediatriz de FH.

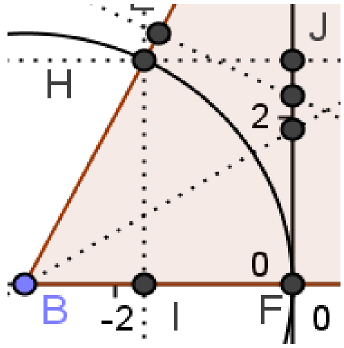

Figura 9. Construcción con el GeoGebra.

Problema10. Problem. In triangle ABC, AB=AC. A circle is tangent internally to the circumcircle of triangle ABC and also to sides AB, AC at P, Q, respectively. Prove that the midpoint of segment PQ is the center of the incircle of trinangle ABC.

Una solución formal de este problema consiste en plantear una figura de análisis, Figura 10, donde M es el punto de tangencia de las dos circunferencias como AB=AC, AM es diámetro de la circunferencia determinada por A, B y C, bisectriz de los ángulos ∢A y ∢PMQ, perpendicular a los segmentos paralelos BC y PQ y los corta en su punto medio (es mediatriz). Si se denota por I al punto medio de PQ y al ‹APQ=2 β tendremos que ∢ABC=2 β por ser correspondientes entre las paralelas determinadas por P, Q y B, C. También ∢PMQ=∢APQ=2 β por ser seminscrito e inscrito sobre la misma cuerda PQ y como AM es bisectriz del ∢PMQ, ∢PMI= α.

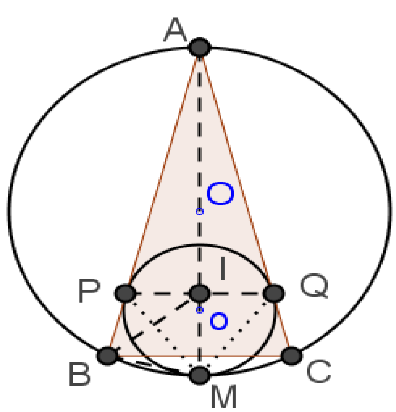

Figura 10. Figura de análisis.

Como ∢ABM y ∢MIP son rectos, el primero por estar inscrito sobre el diámetro AM y el segundo por ser PQ⊥AM; el cuadrilátero BMIP determina una circunferencia en la que ∢PBI=∢PMI= β por estar inscritos sobre la misma cuerda (PI) y como ABC=2 β, ∢IBC= β, es decir la bisectriz del ∢B pasa por I. Finalmente, como las bisectrices de ∢A y ∢B se cortan en I, este es el incentro del triángulo ABC. En la figura 11 se exhiben los ángulos β y 2 β, y en la figura 12, valores específicos calculados con el GeoGebra para una posición determinada en el plano.

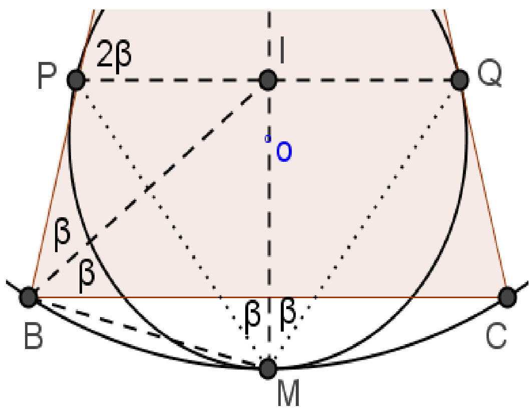

Figura 11. Exhibe ángulos de amplitud β y 2 β.

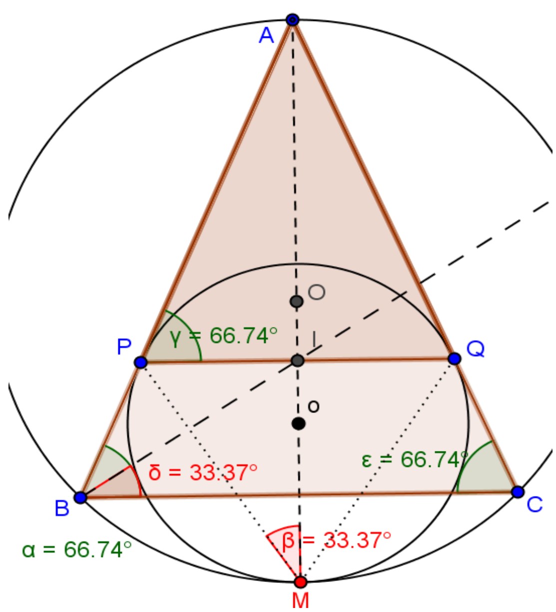

Figura 12. Exhibe valores específicos

Desde el punto de vista didáctico cabe preguntarse ¿se acercarán los escolares sin suficiente entrenamiento matemático a una vía de solución como esta?, ¿cuáles incidencias pudiera tener la utilización del GeoGebra en la resolución de este problema?, ¿cómo procederían los escolares con este software para construir una figura de análisis de este problema?, ¿pudieran desarrollar acciones investigativas apropiadas con el GeoGebra para la búsqueda de la vía de solución y constatar su validez con facilidad para diversos casos?, ¿cuáles medios u objetos de enseñanza – aprendizaje pudiera elaborar el docente?, ¿cómo organizar el trabajo colaborativo para la resolución de un problema con estas particularidades?, ¿sería conveniente introducir en el currículo escolar el GeoGebra u otro software de matemática dinámica?

Aunque no fue propósito responder las preguntas anteriores, el autor de este artículo las ha abordado de manera explícita e implícita en cursos de pregrado y postgrado, entre ellos el curso optativo: "Evaluación y mejoramiento de la calidad educativa VI", impartido en la Universidad de Ciencias Pedagógicas "Frank País García" en el 2014, en el cual se sometieron a los escolares en formación como docentes a la resolución de variantes de estos problemas y análisis didácticos, que permitieron revelar argumentos interesantes.

Los diferentes problemas presentados, elaborados a partir del problema de olimpiada, considerando creencias, necesidades y potencialidades de los escolares de distintos niveles educativos pueden servir de punto de partida para reflexiones didácticas, nuevos análisis y enriquecimientos con aspectos no abordados en este, por ejemplo, puede explicarse la ampliación o generalidad de este problema de olimpiada a un triángulo cualquiera, es decir, suprimiendo la condición de que el triángulo sea isósceles, aspecto expuesto en el artículo inédito: "Generalización de problemas matemáticos con asistencia del GeoGebra. Ejemplo".

CONCLUSIONES.

Dificultades diagnosticadas en docentes para la transformación de ejercicios y problemas reflejan la necesidad de materiales didácticos con ejemplos y consideraciones didácticas para contribuir a erradicarlas; propósito que se alcanza con diez variantes de un problema relativamente bastante exigente, en los cuales se aprecia el tratamiento de contenidos básicos y niveles de exigencias con las correspondientes justificaciones didácticas.

Si bien los ejemplos presentados pueden servir de modelo para la transformación de ejercicios y problemas con asistencia del GeoGebra, es recomendable el desarrollo de cursos de superación docente para profundizar en variantes y socializar experiencias interesantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. Hernández Hechavarría, Carlos M. (2017). Ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra: ejemplos y observaciones didácticas. *Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores, IV (3), Artículo 8,* Recuperado de: http://www.dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com

2. Jiménez García, José Guadalupe y Jiménez Izquierdo, Sergio. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad, 4, Núm. 7, 1-17. Recuperado de http://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654

3. Klamkim, Murray S. (1986). International Mathematical Olimpiads 1979-1985 and forty supplementary problems. Mathematical Associeation of America. Washington, D.C. United States of America. Vol. 31 ISBN: 0-88386-631-X

DATOS DEL AUTOR:

1. Carlos Manuel Hernández Hechavarría. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Máster en Ciencias de la Educación y Licenciado en Matemática. Labora como profesor de pregrado y posgrado en la Universidad de Oriente y es miembro del Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran". Correo electrónico: carlosmhh@uo.edu.cu

RECIBIDO: 10 de septiembre del 2017. **APROBADO:** 29 de septiembre del 2017.